Code :

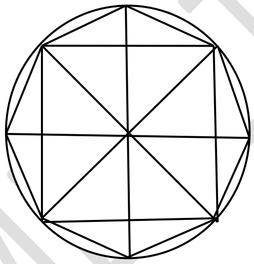
Thème: GEOMETRIE DU PLAN

LEÇON 6 : CERCLES ET TRIANGLES

Durée : 8 heures

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Après le tournoi inter-établissements, votre école a remporté le trophée. Les joueurs ont obtenu des médailles marquées par des figures géométriques comme l'indique la figure ci-contre.



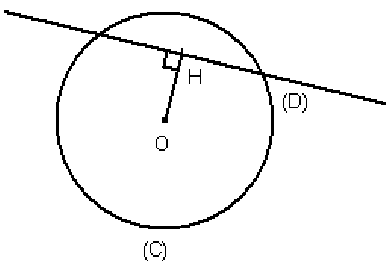
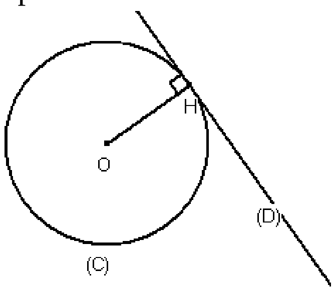
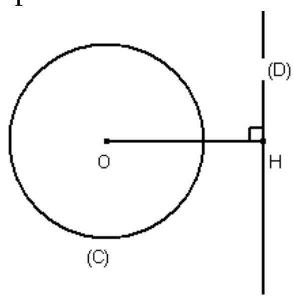
Des élèves de 4ème veulent reproduire ces figures géométriques observées. Ainsi, ils décident de faire appel à leurs connaissances en géométrie pour distinguer les figures et les reproduire.

B-CONTENU DE LA LECON

I. Cercle et droite

1. Positions relatives d'une droite et d'un cercle

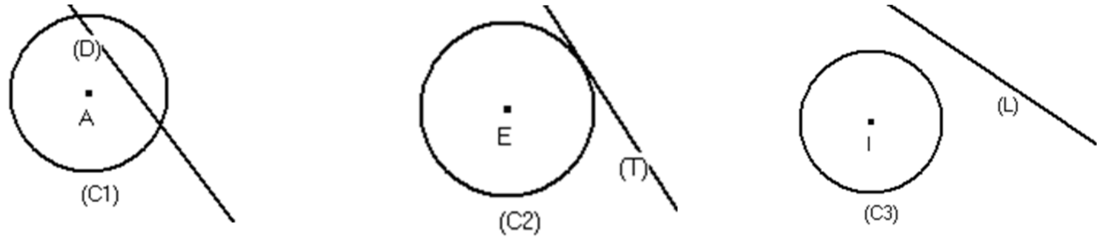
Propriétés

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de rayon r ; (D) est une droite. H est le point de (D) tel que :$(OH) \perp (D)$.		
Si $OH < r$, alors $(\mathcal{C})$ et (D) ont deux points communs.  $(\mathcal{C})$ et (D) sont sécants.	Si $OH = r$, alors $(\mathcal{C})$ et (D) ont un point commun.  $(\mathcal{C})$ et (D) sont tangents.	Si $OH > r$, alors $(\mathcal{C})$ et (D) n'ont aucun point commun.  $(\mathcal{C})$ et (D) sont disjoints.
Si $(\mathcal{C})$ et (D) ont deux points communs, alors $OH < r$.	Si $(\mathcal{C})$ et (D) ont un point commun, alors $OH = r$.	Si $(\mathcal{C})$ et (D) n'ont aucun point commun, alors $OH > r$.

Exercice de fixation

Exercice 1

Observe les figures suivantes.



Recopie et complète par le mot qui convient : tangents, disjoints ou sécants.

- La droite (D) et le cercle (C1) sont …………….
- La droite (T) et le cercle (C2) sont …………….
- La droite (L) et le cercle (C3) sont …………….

Corrigé

- La droite (D) et le cercle (C1) sont sécants.
- La droite (T) et le cercle (C2) sont tangents.
- La droite (L) et le cercle (C3) sont disjoints

Exercice 2

L'unité de longueur est le centimètre.

(C) est le cercle de centre I et de rayon 3 et (L) une droite. K est un point de la droite (L)

tel que : IK=5.

Détermine la position relative de (C) et de (L).

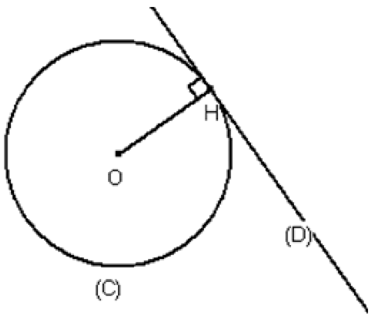
Corrigé

$IK > 3$, donc (C) et (L) sont disjoints.

2. Tangente à un cercle

a- Définition

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et H est un point de $(\mathcal{C})$.
On appelle tangente en H au cercle$(\mathcal{C})$, la droite passant par H et perpendiculaire au support du rayon [OH].



H est un point de $(\mathcal{C})$.
[OH] est un rayon du cercle.
(D) est perpendiculaire à (OH) en H.
(D) est la tangente à$(\mathcal{C})$ en H.

b- Construction des tangentes à un cercle passant par un point extérieur au cercle

Méthode

On donne un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et un point A extérieur à ce cercle.

Pour construire les tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par le point A, on procède de la manière suivante :

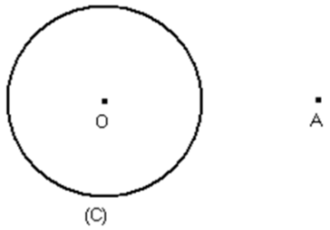
- on place le point I milieu de $[AO]$;
- on trace le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre I et de rayon IA ;
- on place T et T', points d'intersection des cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
- on trace les droites (AT) et (AT').

Les droites (AT) et (AT') sont les tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A.

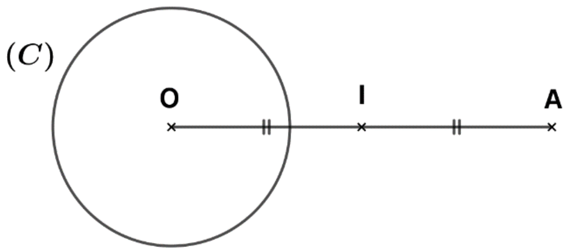
<u>Exercice de fixation</u>

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et A est un point extérieur à $(\mathcal{C})$.

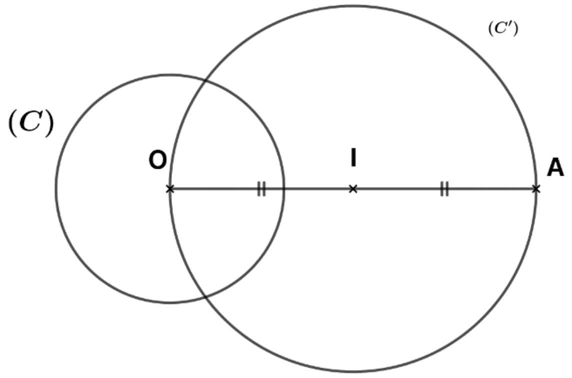
Construis les tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par A.



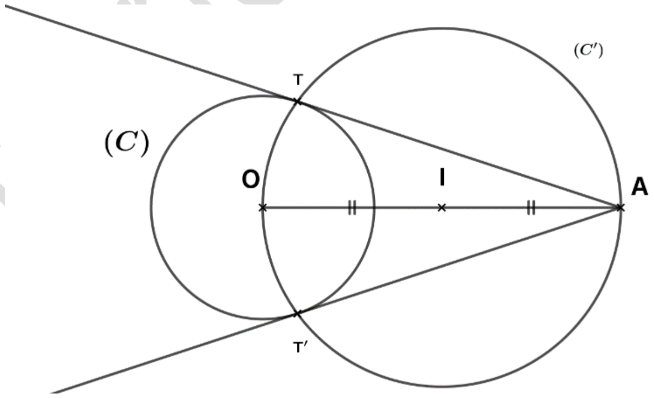
Corrigé



Etape 1



Etape 2



Etape 3

II. Triangles et droites

1. Droite des milieux

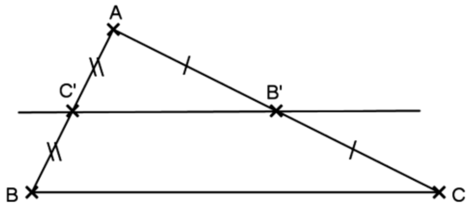
Propriété

Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux cotés, alors elle est parallèle au support du troisième côté.

ABC est un triangle

C' est le milieu de [AB]	B' est le milieu de [AC]

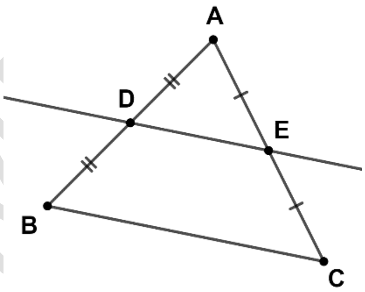
(B'C')// (BC)



(BC) est appelée **droite des milieux.**

Exercice de fixation

Examine la figure ci-contre.
Justifie que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.



Corrigé

ABC est un triangle. D est le milieu de [AB] et E le milieu de [AC].
Donc, la droite (DE) est parallèle à (BC), car dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux cotés, alors elle est parallèle au support du troisième côté.

2-Segment joignant les milieux de deux côtés

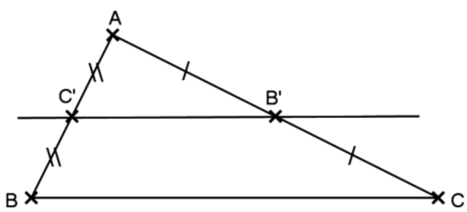
Propriété

Dans un triangle, la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

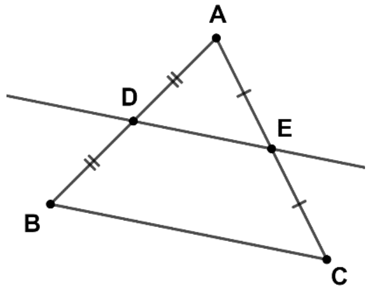
ABC est un triangle

C' est le milieu de [AB]	B' est le milieu de [AC]

$B'C' = \frac{1}{2} BC$



Exercice de fixation



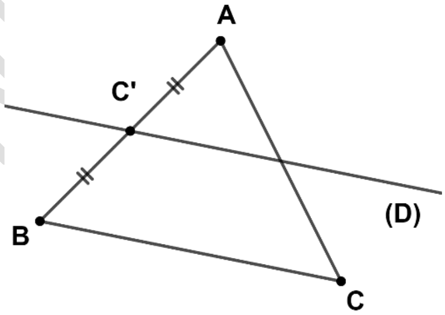
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs, ABC est un triangle tel que $BC = 15\ cm$.
Calcule DE.

Corrigé

ABC est un triangle. D est le milieu de [AB] et E le milieu de [AC].
Donc : DE = $\frac{1}{2}BC$, car dans un triangle, la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.
DE = $\frac{1}{2} \times 15 = 7{,}5\ cm$.

3- Droite passant par le milieu d'un côté

Propriété



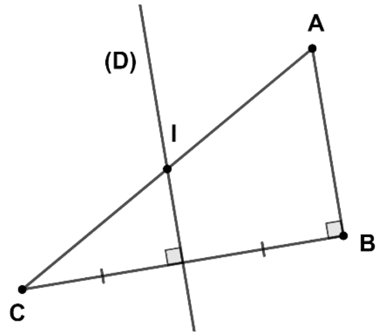
Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle au support d'un autre côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.

ABC est un triangle.

C' est le milieu de [AB]	(D) //(BC)	C' ∈ (D)

(D) passe par le milieu de [AC]

Exercice de fixation



Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en B.
La médiatrice (D) de [BC] coupe l'hypoténuse en un point I.
Justifie que le point I est le milieu du segment $[AC]$.

Corrigé

- ABC est un triangle rectangle en B, donc (AB)⊥ (BC).

  (D) est la médiatrice du segment [BC], donc (D) ⊥(BC).

Les droites (AB) et (D) sont perpendiculaires à une même droite (BC), donc elles sont parallèles.

- Dans le triangle ABC, la droite (D)passe par le milieu de [BC] et est parallèle à (AB).
  Donc, la droite (D) passe par le milieu de $[AC]$.
  Or (D) passe par le point I qui appartient au segment $[AC]$.
  Par conséquent, le point I est le milieu de $[AC]$.

III. Droites particulières et points remarquables dans un triangle

1- Hauteurs et orthocentre

a- Propriété

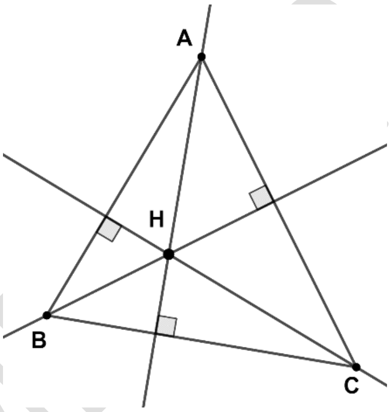
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

b-Définition

Le point de concours des hauteurs d'un triangle est appelé orthocentre.

Exemple

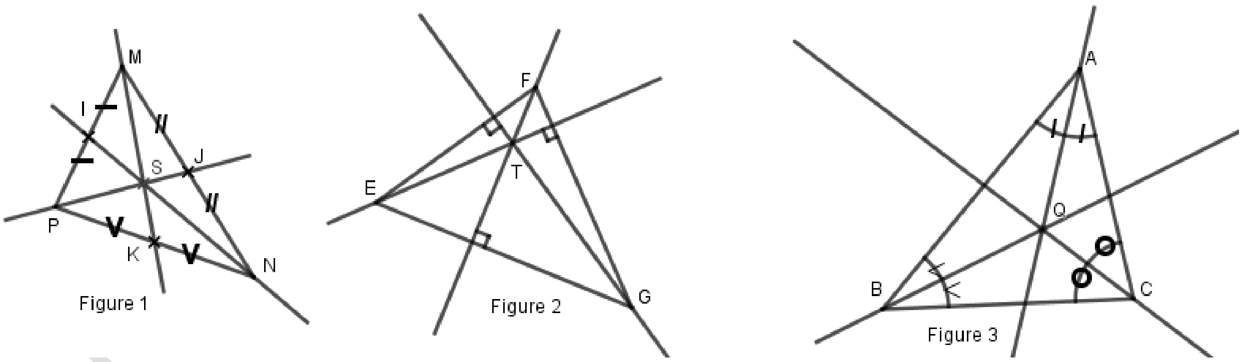
Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.



Exercice de fixation

Observe les figures ci-dessous.

Lequel des points S, T et Q est l'orthocentre du triangle ? Justifie ta réponse.



Corrigé

Le points S n'est pas le point de concours des hauteurs du triangle MNP.

Le point Q n'est pas le point de concours des hauteurs du triangle ABC.

Le point T est le point de concours des hauteurs du triangle EFG, donc il est l'orthocentre du triangle EFG.

2- Médianes et centre de gravité

a- Propriété

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

b- Définition

Le point de concours des médianes d'un triangle est appelé **centre de gravité** du triangle.

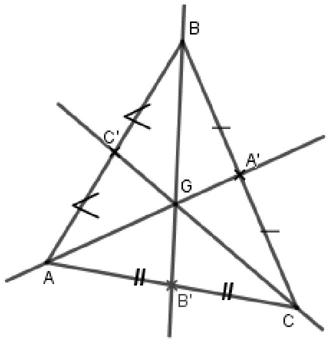
<u>Exemple</u>

Les droites (AA'), (BB') et (CC')

sont les médianes du triangle ABC .

G est le centre de gravité du triangle ABC.

On a : $AG = \frac{2}{3}AA'; BG = \frac{2}{3}BB'$ et $CG = \frac{2}{3}CC'$.



Remarque

Le centre de gravité d'un triangle est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet.

Exercice de fixation

Observe les figures ci-dessous.

Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :

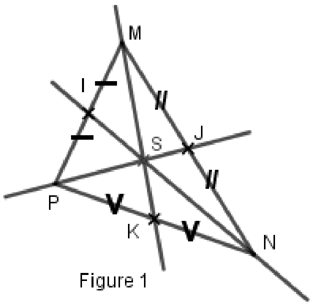


Figure 1

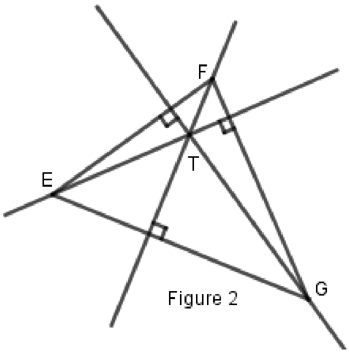


Figure 2

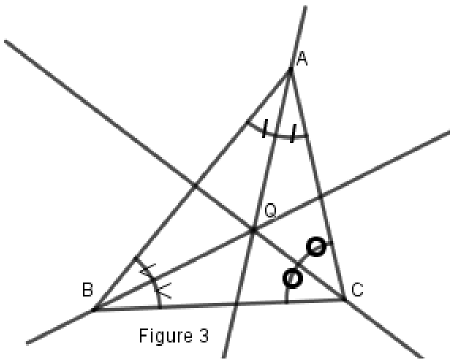


Figure 3

Affirmation	Réponse
S est le centre de gravité du triangle MNP	
T est le centre de gravité du triangle EFG	
Q est le centre de gravité du triangle ABC	

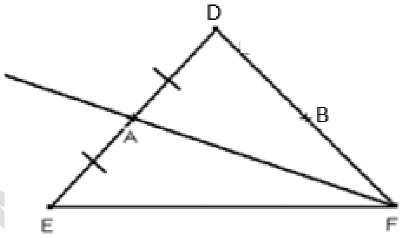
Corrigé

Affirmation	Réponse
S est le centre de gravité du triangle MNP	Vrai
T est le centre de gravité du triangle EFG	Faux
Q est le centre de gravité du triangle ABC	Faux

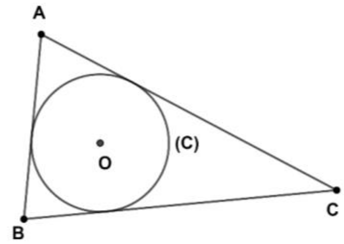
Remarque

Chaque médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.

La droite (AF) est une médiane du triangle EDF.
$Aire\ AEF = Aire\ ADF$

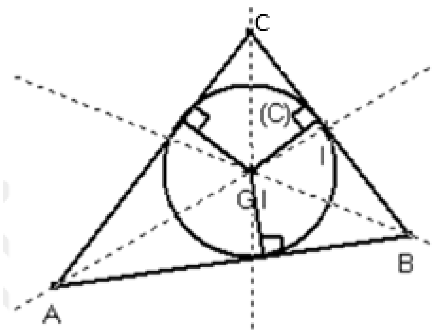


3-Bissectrices et centre du cercle inscrit
a-Définition
On appelle cercle inscrit dans un triangle, le cercle intérieur à ce triangle et tangent aux supports de ses côtés.



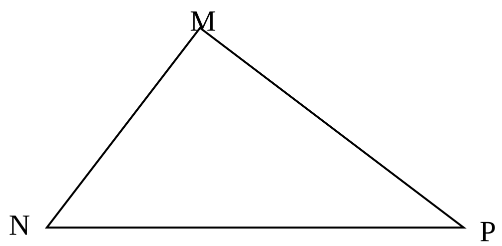
b-Propriété
Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

<u>Exemple</u>
Les droites (AI) , (CI) et (BI) sont les bissectrices du triangle ABC.
I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.



<u>Exercice de fixation</u>

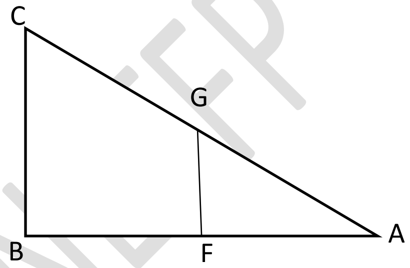
Trace les trois bissectrices du triangle MNP, puis trace le cercle inscrit dans ce triangle.



C-SITUATION D'ÉVALUATION

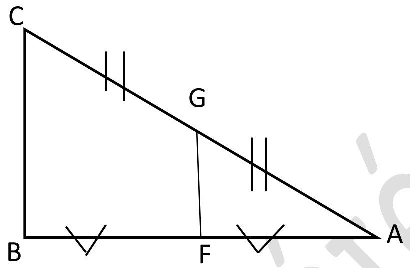
Un géomètre s'est servi d'un schéma réalisé après divers relevés avec son appareil pour déterminer la hauteur d'un immeuble. À la demande de son chef de service qui veut vérifier l'exactitude de ses calculs, il reproduit ce schéma comme l'indique la figure ci-dessous. Des codages manquants rendent difficile l'exploitation de la figure.

1- Code la figure pour qu'on puisse affirmer avec une propriété relative à la droite des milieux que les supports des segments $[GF]$ et $[BC]$ sont parallèles.
2- Détermine la hauteur BC de cet immeuble sur la base de ce codage sachant que $GF = 24$ m.



Corrigé

1.



2. D'après la propriété qui dit que : Dans un triangle, la longueur du segment qui joint les milieux de deux cotés est égale à la moitié de la longueur du troisième coté.

$GF = \frac{1}{2}BC$, d'où $BC = 2GF$.

Donc : $BC = 2 \times 24 = 48$.

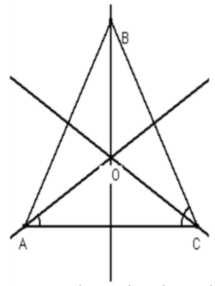
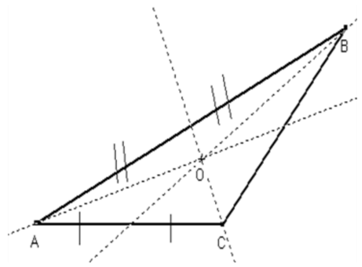
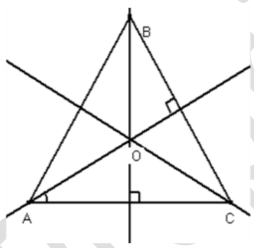
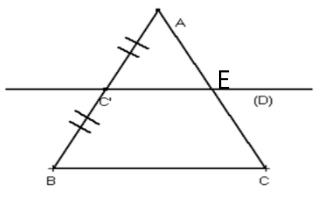
La hauteur de cet immeuble est de 48 m.

D-EXERCICES

D- 1 Exercice de fixation

Exercice 1

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est vraie.
Ecris le numéro de la figure et la lettre qui correspond à l'affirmation vraie.

N°	Figures	Affirmations		
		A	B	C
1	 Les droites (AO), (BO) et (CO) sont les bissectrices respectives des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$	O est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC	O est le centre de gravité du Triangle ABC	O est l'orthocentre du triangle ABC
2		O est le centre du Cercle inscrit Au triangle ABC	O est le centre de Gravité du Triangle ABC	O est l'orthocentre du triangle ABC
3		O est le centre du Cercle inscrit Au triangle ABC	O est le centre de Gravité du Triangle ABC	O est l'orthocentre du triangle ABC
4	 (C'E) //(BC)	$C'E = BC$	$C'E = \frac{1}{2}BC$	$BC = \frac{1}{2}C'E$

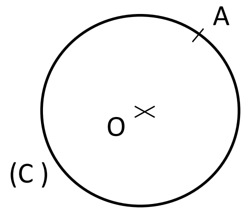
Corrigé

1- A ; 2- B ; 3- C ; 4- B

Exercice 2

(C) est un cercle de centre O et A est un point de (C).

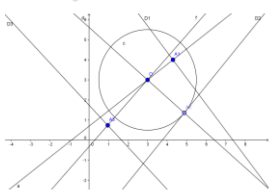
Construis la tangente (T) à(C) au point A.



Exercice 3

1) Construis le cercle (C) de centre O et de rayon 2,5 cm.
2) Dans chacun des cas ci-dessous;
   -place un point A ;
   -trace la droite (D) passant par A et perpendiculaire à (OA) ;
   -indique la position relative de (C) et de (D).
   a) OA = 1,5 cm.
   b) OA = 2,5 cm.
   c) OA = 3,5 cm.

Corrigé



a) Pour OA_1 = 1,5 cm, (C) et (D_1) sont sécants.

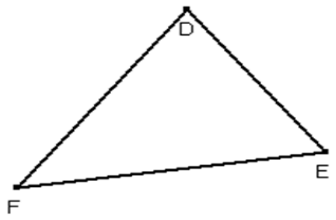
b) Pour OA_2 = 2,5 cm, (C) et (D_2) sont tangents.

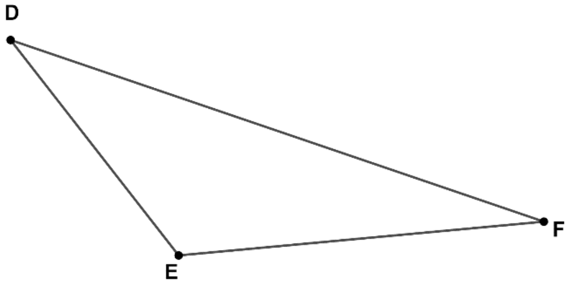
c) Pour OA_3 = 3,5 cm, (C) et (D_3) sont disjoints.

D-2 Exercices de renforcement

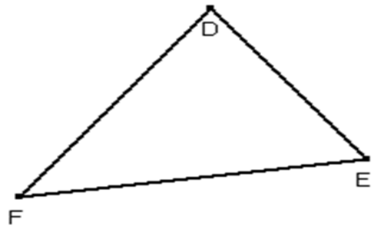
Exercice 4

1) Construis l'orthocentre O du triangle DFE.

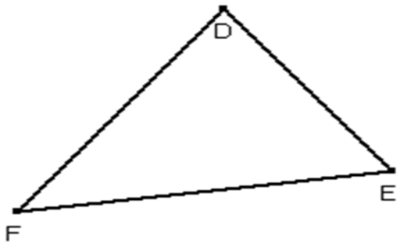




2) Construis le centre de gravité G du triangle DFE.



3) Construis le cercle (C) inscrit dans le triangle DFE.



Exercice 5

L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que AB = 6 ; AC = 7 et BC = 10.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
1) Justifie que (IJ)//(BC).
2) Déduis-en que IJ = $\frac{1}{2}$ BC.
3) Calcule IJ.

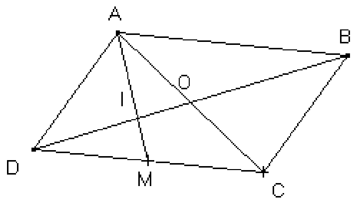
Corrigé

1) ABC est un triangle et I milieu de [AB] et J milieu de [AC]. D'après la propriété de la droite des milieux,
   (IJ)//(BC).
2) (IJ)//(BC), D'après la propriété sur le segment joignant les milieux de deux côtés,
3) IJ = $\frac{1}{2}BC$.
4) IJ = $\frac{1}{2}BC$ donc IJ = $\frac{1}{2} \times 10 = 5$.

Exercice 6

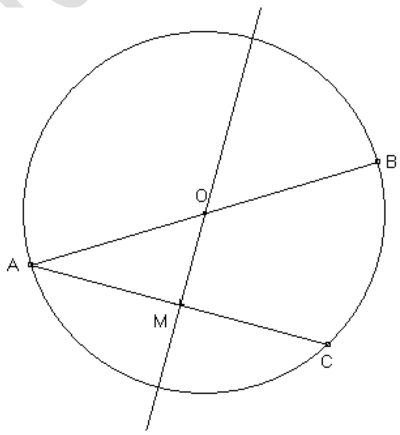
Soit un parallélogramme ABCD de centre O et M le milieu de [DC]. La droite (AM) coupe (BD) en I.

Justifie que DI =$\frac{1}{3}$ DB.



Exercice 7

Soit un cercle de centre O et de diamètre [AB]. Soit C un point du cercle et M le milieu de [AC]. Justifie que (OM) est perpendiculaire à la droite (AC).



D-3- Exercices d'approfondissement

Exercice 8

Soit ABC un triangle. Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].

1) Fais une figure.

2) a- Démontre que (IJ) et (BC) sont parallèles.

b- Justifie que IJ = $\frac{1}{2}$ BC.

3) Soit M un point intérieur au triangle AIJ ; K le symétrique de M par rapport à I ; L le symétrique de M par rapport à J.

a- Démontre que (IJ) et (KL) sont parallèles.

b- Justifie que IJ = $\frac{1}{2}$ KL.

4) Justifie que BC = KL.

Exercice 9

Soit ABC un triangle rectangle en A. La médiatrice de [AB] coupe [AB] au point E et [BC] au point F.

K est le milieu de [AC].

1) Démontre que (EF) et (AC) sont parallèles.

2) Démontre que (BC) et (KE) sont parallèles.

Exercice 10

ABC est un triangle. A' est le milieu de [BC]. La droite passant par A' et parallèle à la droite (AB) coupe la droite (CA) au point P. La droite passant par le point P et parallèle à (BC) coupe la droite (AB) en Q.

1) Fais une figure.
2) Justifie que P est le milieu [AC].
3) Justifie que AB = 2 BQ.