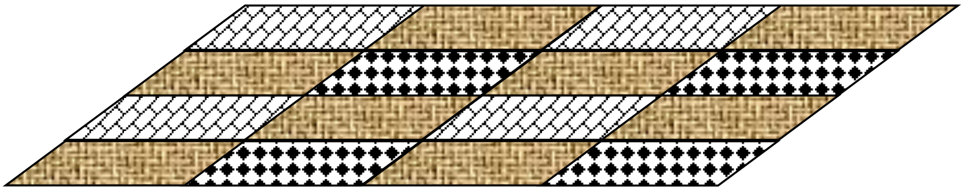
THEME : Configurations du plan

LEÇON 11 de la classe de 6ème :

PARALLELOGRAMME

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

De passage chez un tisserand de son quartier, un élève en classe de sixième au Lycée Moderne HKB de DAOUKRO observe les motifs des pagnes KITA que celui-ci confectionne. Il ramène en classe un morceau de tissu représenté par le schéma ci-dessous.



Emerveillés par l'harmonie des motifs du pagne, les élèves de la classe décident d'identifier la nature et les caractéristiques des quadrilatères qui s'y trouvent.

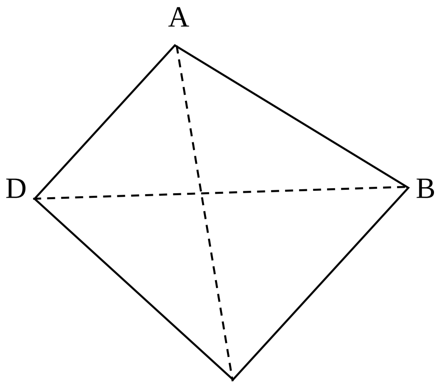
B- RESUME DE COURS

I. Parallélogramme

1. Quadrilatère

Présentation

Un quadrilatère est une figure formée par une ligne brisée fermée non croisée et constituée de 4 segments.
Ces quatre segments sont les côtés du quadrilatère. Deux côtés qui ont un point commun sont dits consécutifs, deux côtés qui n'ont pas de points communs sont dits opposés.
Le point commun à deux côtés est appelé sommet du quadrilatère.

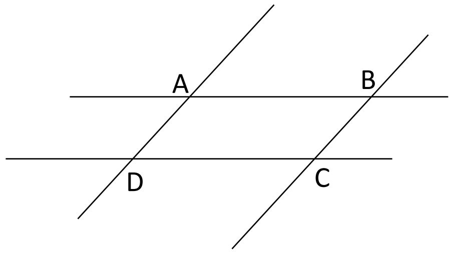


- Le quadrilatère ci-contre peut se nommer ABCD, BCDA, CDAB, DABC, ADCB, DCBA, CBAD et BADC.
- Les points A, B , C et D sont les 4 sommets du quadrilatère.
- [AB] et [DC] sont des côtés opposés.
- [AB] et [AD] sont des côtés consécutifs
- [BD] et [AC] sont les diagonales du quadrilatère.

2. Parallélogramme

Définition :
Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés ont des supports parallèles.

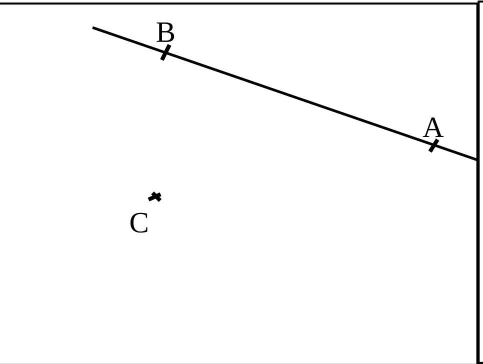
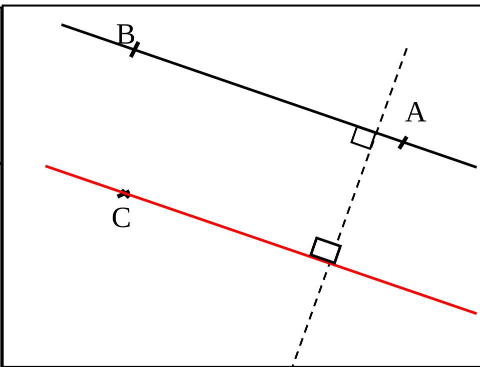
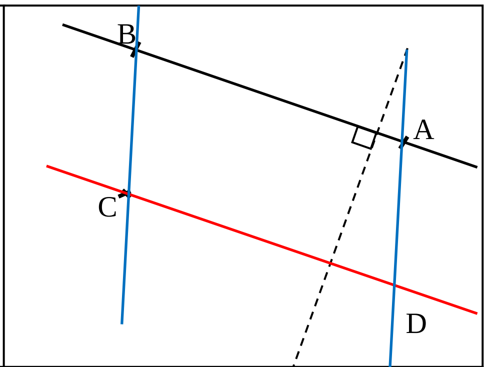
Exemple :



Sur la figure ci-dessus on a (AB)//(CD) et (AC)//(BD) donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

3. Construction d'un parallélogramme

Film de la construction d'un parallélogramme ABCD.

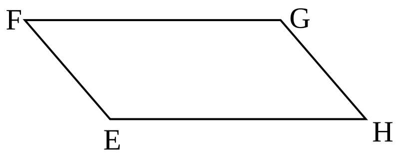
		
On trace la droite (AB) et on place un point C n'appartenant pas à la droite (AB).	On trace la parallèle à (AB) passant par C.	On trace la parallèle à (BC) passant par A. Elle coupe la droite parallèle à (AB) en D

4. Propriétés

- **Parallélogramme et longueur des côtés**

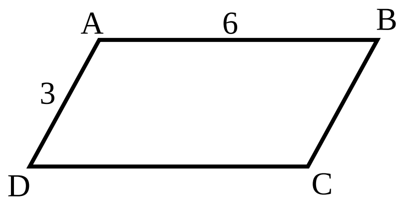
Propriété 1
Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés ont la même longueur.

Exemple



EFGH est un parallélogramme, donc EF = GH et FG = EH.

Exercice de fixation
L'unité de mesure est le centimètre (cm)
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en dimensions réelles, $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 6$ et $AD = 3$.
Donne la distance DC.

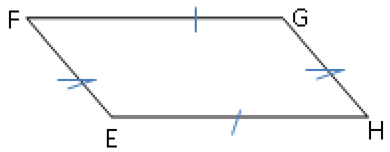


Corrigé de l'exercice de fixation
$ABCD$ est un parallélogramme.
D'où $DC = AB$.
Or $AB = 6$.
Donc $DC = 6$.

Propriété 2

Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Exemple



EFGH est un quadrilatère et EF = GH et FG = EH, donc EFGH est un parallélogramme.

Exercice de fixation

L'unité de mesure est le centimètre (cm).

Parmi les figures ci-dessous qui ne sont pas en vraies dimensions, une est un parallélogramme. Indique-la.

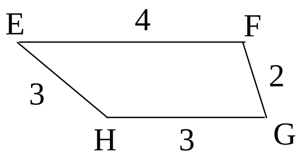


Figure 1

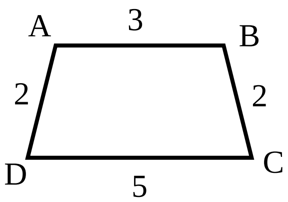


Figure 2

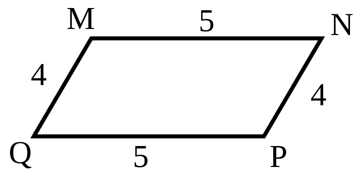


Figure 3

Corrigé de l'exercice de fixation

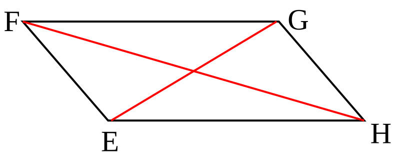
La **figure 3** est un parallélogramme car ses cotés opposés ont la même longueur.

- **Parallélogramme et diagonales**

Propriété 1

Si quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

Exemple

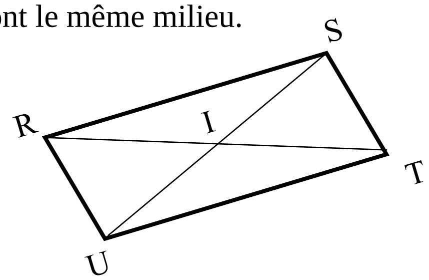


EFGH est un parallélogramme, donc les diagonales [FH] et [EG] ont le même milieu.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, $RSTU$ est un parallélogramme et les droites (RT) et (SU) se coupent en I .

Cite est le milieu du segment $[RT]$. Justifie ta réponse.



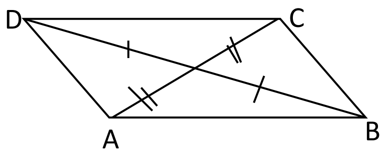
Corrigé de l'exercice de fixation

Le milieu du segment $[RT]$ est le point I car dans un parallélogramme les diagonales se coupent en leur milieu.

Propriété 2

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Exemple

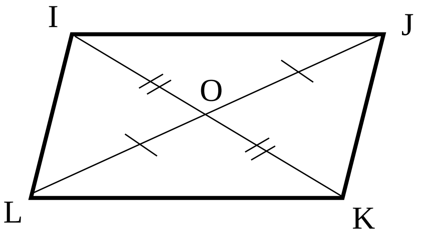


ABCD est un quadrilatère et les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu, donc ABCD est un parallélogramme.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, O est le milieu des segments $[IK]$ et $[JL]$

Donne la nature du quadrilatère $IJKL$. Justifie ta réponse.



Corrigé de l'exercice de fixation

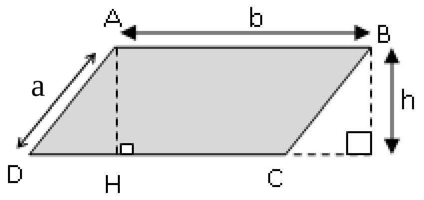
Le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme car ses diagonales $[IK]$ et $[JL]$ se coupent en leur milieu.

II. Formules de l'aire et du périmètre d'un parallélogramme

- **Périmètre**

a, et b étant les longueurs respectives des côtés d'un parallélogramme, son périmètre $\mathcal{P}$ est donné par la formule :

$$\boldsymbol{\mathcal{P} = (a + b) \times 2}$$



- **Aire**

h étant la hauteur relative à l'un des côtés de longueur b, son aire $\mathcal{A}$ est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \mathrm{b} \times h$$

Exercices de fixation :

Exercice1

Calcule périmètre d'un parallélogramme dont les longueurs des côtés sont 5 cm et 3 cm.

Corrigé de l'exercice de fixation1

Le périmètre $\mathcal{P}$ est :

$\mathcal{P} = 2 \times (5 + 3) = 16\ cm$

Le périmètre de ce parallélogramme est $16\ cm$.

Exercice2

On donne un parallélogramme ABCD tel que AB égal 7cm et la hauteur correspondante au côté [AB] est égale à 3 cm.

Calcule l'aire de ce parallélogramme.

Corrigé de l'exercice de fixation1

L'aire a est :

$a = 7 \times 3 = 21\ cm^2$

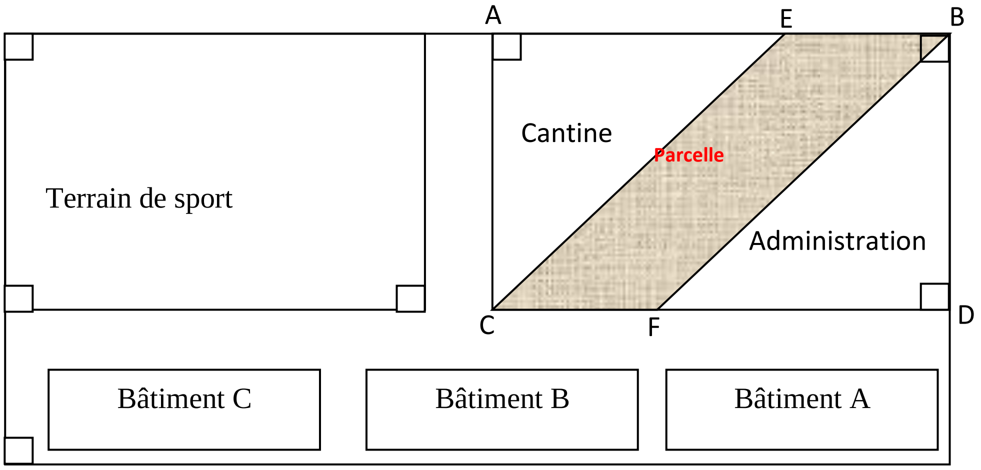
L'aire de ce parallélogramme est $21\ cm^2$

C- SITUATION D'EVALUATION

Les élèves du club environnement d'un lycée ont en projet la création d'un jardin dans la cour de l'école. Pour leur projet ils ont besoin d'une portion de la cours du lycée, sur laquelle ils commenceront par planter du gazon. Convaincue que ce projet va contribuer à l'embellissement de l'établissement, l'administration a intégré ce projet dans son plan d'action, et a mis à la disposition du club un montant de 180 000 Fcfa et une parcelle hachurée.

Sur le plan de l'école ci-dessous, la parcelle est représentée par la partie coloriée en marronet on a :

$\mathrm{BD} = 30m$; $\mathrm{AE} = 40m$; $\mathrm{EB} = \mathrm{CF} = 6m$ et $\mathrm{CE} = \mathrm{BF} = 50m$



Le prix du m² de gazon étant de 1075 Francs, le président du club voudrait savoir s'ils ont suffisamment d'argent pour couvrir la surface indiquée de gazon.

1. Justifie que le quadrilatère EBFC est un parallélogramme.
2. Justifie, en la calculant, que l'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme EBFC est 180 m^2.
3. Calcule le montant nécessaire pour l'achat du gazon.
4. Répond à la préoccupation du président du club environnement.

Corrigé de la situation d'évaluation

1. ***Je justifie que le quadrilatère EBFC est un parallélogramme.***

Je sais que $EBFC$ est un quadrilatère et $EB = CF$ et $CE = BF$.
Donc $EBFC$ est un parallélogramme car un quadrilatère qui a ses côtés opposés de même longueur est un parallélogramme.

2. ***Je justifie que l'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme EBFC est 180 m².***

Je remarque que le segment $[BD]$ est une hauteur du parallélogramme EBFC relative au côté $[CF]$.
Calcul de l'aire : $\mathcal{A} = \mathrm{BD} \times \mathrm{CF} = 30 \times 6 = 180\ m^2$
L'aire du parallélogramme EBFC est bien 180 m^2

3. ***Je calcule le montant de la somme nécessaire pour l'achat du gazon.***

Je sais que le prix du m^2 de gazon est de 1075 F et que l'aire de la parcelle est de 180 m^2 .
Calcul de la somme d'argent nécessaire pour l'achat du gazon :
$180 \times 1075 = 193\ 500$ F .
Le montant nécessaire pour l'achat du gazon est de 193 500 Fcfa

4. ***Je réponds à la préoccupation du président du club environnement.***

Je sais que le club environnement a reçu $180000F$ de l'administration pour la réalisation du projet et le montant nécessaire pour l'achat du gazon est 193 500 Fcfa, Or $180000F < 195000F$

Donc le club environnement n'a pas suffisamment d'argent pour couvrir la surface indiquée de gazon.

D- EXERCICES

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice1

Un parallélogramme ERST a pour aire 120 m^2. Le côté [ER] a pour longueur 12 m.
Calcule la longueur de la hauteur correspondant à ce côté.

Corrigé

h étant la hauteur relative au côté [ER] je sais que l'aire du parallélogramme *EFGH* est :

$a = ER \times h$ donc $h = \frac{a}{ER}$

d'où $h = \dfrac{120m^2}{12m} = 10m$

La hauteur cherchée est de 10 m

Exercice 2

Le périmètre d'un parallélogramme est 316 m. L'un de ses côtés a pour longueur 90 m
Détermine la longueur de l'autre côté.

Corrigé

a et b étant les longueurs de côtés, je sais que le périmètre de ce parallélogramme est :

$p = 2(a + b) = 2(a + 90)$

donc $316 = 2(a + 90)$

d'où $a + 90 = \frac{316}{2} = 158$

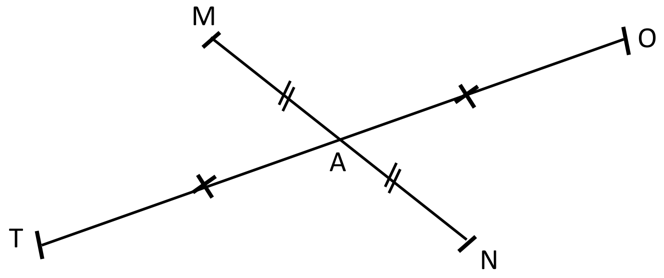
on a ainsi $a = 158 - 90 = 68\ m$

L'autre côté de ce parallélogramme mesure 68 m.

Exercice 3

On donne la figure codée ci-contre., qui n'est pas en grandeurs réelles avec MT = 4,7 cm

1) Justifie que les droites (MO) et ((TN) sont parallèles.
2) Donne la mesure du segment [ON]. Justifie ta réponse.



Corrigé

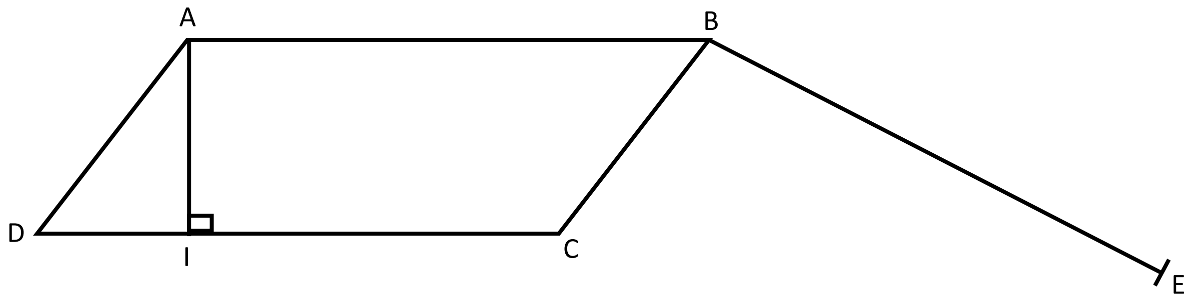
1)
- Les segments [MN] et [OT] qui sont les diagonales du quadrilatère MONT ont le même milieu A, donc donc le quadrilatère MONT est un Parallélogramme.
- Les droites (MO) et (TN) sont les supports de deux côtés du parallélogramme MONT, or les supports des côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles : (MO) et ((TN) sont parallèles.

2) Le segment [ON] mesure 4,7 cm.
   Le segment [ON] est le côté du parallélogramme MONT qui est opposé au côté [MT], donc ces deux côtés ont la même mesure.

Exercice 4

On donne la figure ci-contre., qui n'est pas en grandeurs réelles où ABCD est un parallélogramme. avec $AI = 3{,}5\ cm$; $AB = 5\ cm$ et $BE = 7\ cm$

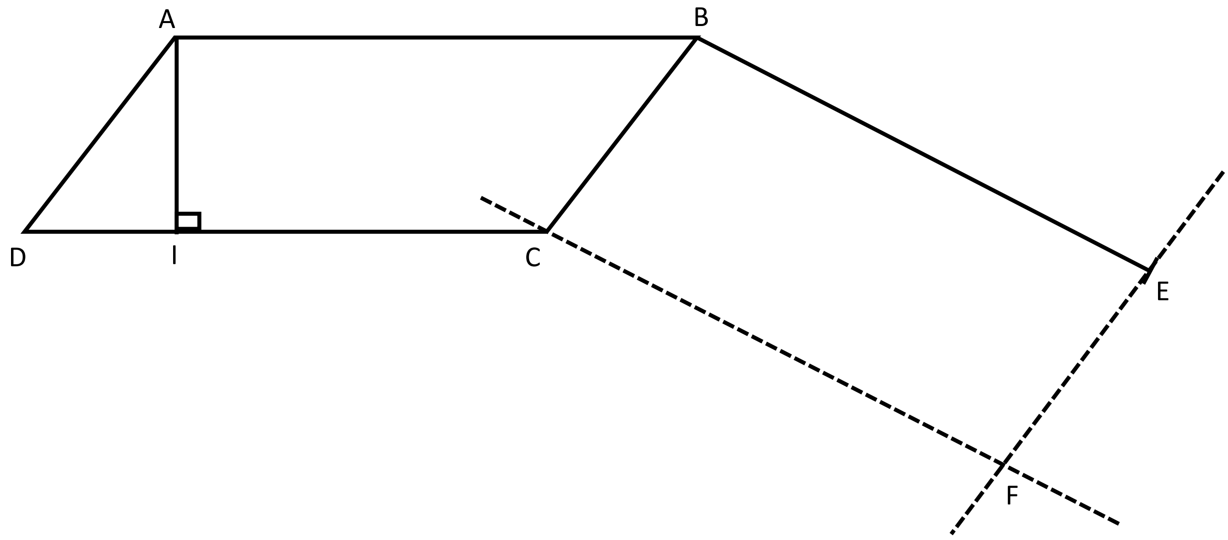
1) Reproduis et complète la figure en plaçant le point F tels que le quadrilatère BEFC est un parallélogramme.
2) Justifie que AD = EF
3) Calcule l'aire du parallélogramme ABCD.
4) Détermine la hauteur h relative au côté [BE] du parallélogramme BEFC sachant qu'il a la même aire que le parallélogramme ABCD.



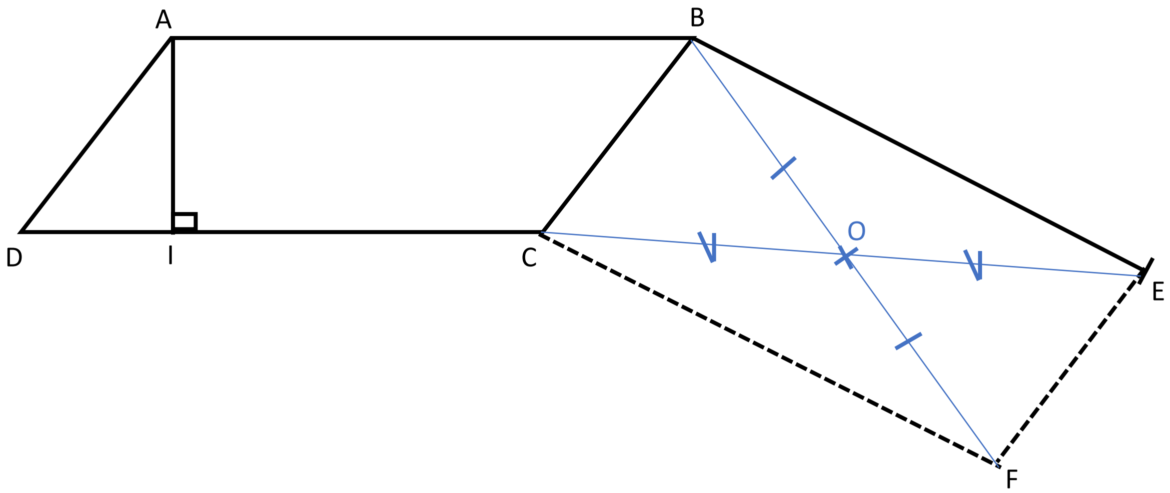
Corrigé

1)

1ère méthode : En utilisant la définition.
On trace la droite parallèle à la droite (BC) passant par E et la droite parallèle à la droite (BE) passant par C : les deux droites se coupent en F.



$2^{ème}$ méthode : En utilisant la propriété des diagonales
On marque le milieu O du segment [CE], puis on marque le point F tel que O est le milieu du segment [BF]



2) ABCD est un parallélogramme donc AD = BC ;
BEFC est un parallélogramme donc BC = EF
On a ainsi AD = BC et BC = EF donc AD = EF

3) L'aire du parallélogramme ABCD est donnée par la formule: DC × AI
Or DC = AB = 5 et AI = 3,5
donc DC × AI $= 5 \times 3{,}5 = 17{,}5\ cm^2$
L'aire du parallélogramme ABCD est $17{,}5\ cm^2$

4) L'aire du parallélogramme BEFC est donnée par la formule: BE × h
Comme les deux parallélogrammes ont la même aire on a : BE × $h = 17{,}5$
donc $h = 17{,}5 \div$ BE $= 17{,}5 \div 7 = 2{,}5\ cm$
La hauteur relative au côté [BE] du parallélogramme BEFC est $2{,}5\ cm$

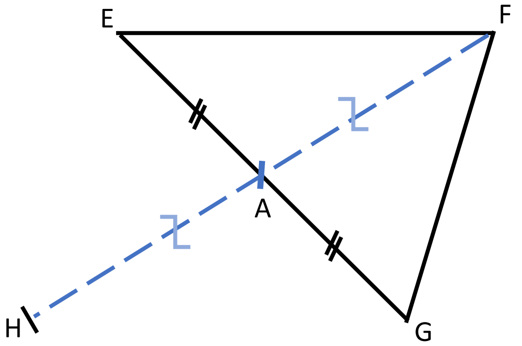
EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 5
L'unité est le centimètre (cm).
1) Construis un triangle EFG tel que EF $= 5$; EG $= 7$ et FG $= 4$
2) Marque le milieu A du segment [EG] et le symétrique H du point F par rapport au point A.
3) Justifie que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.
4) Donne la distance GH. Justifie ta réponse

Corrigé

1)

2)



3) H est le symétrique de F par rapport à A donc A est le milieu du segment [FH].
   On sait aussi que A est le milieu du segment [EG], donc le quadrilatère EFGH est un parallélogramme parce que ses diagonales ont le même milieu.
4) $\mathrm{GH} = 5$
   [GH] et [EF] sont deux côté opposés du parallélogramme EFGH, donc il ont la même longueur ; et comme $\mathrm{EF} = 5$ alors $\mathrm{GH} = 5$

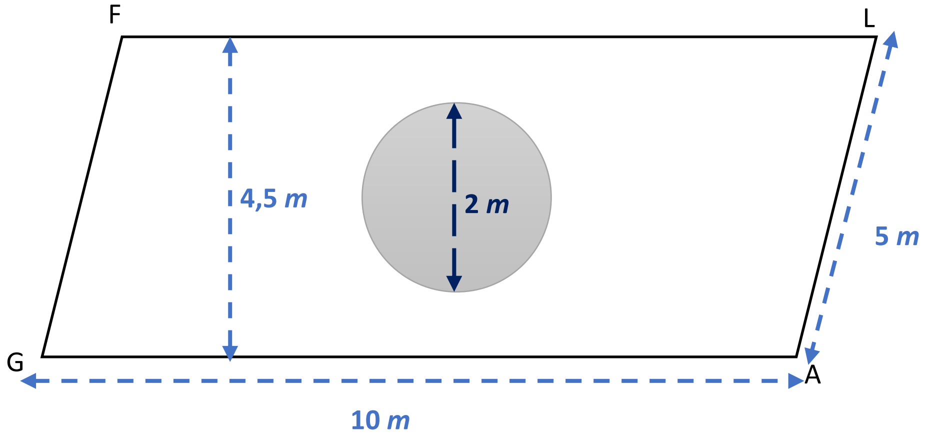
SITUATION D'EVALUATION

<u>Exercice 6</u>

Le directeur de l'EPP Flouakro veut aménager l'espace autour du mât portant le drapeau national, en lieu et place du gazon naturel qui nécessite un entretien régulier, son ami Akolet veut lui fournir du gazon synthétique.
Akolet demande donc au directeur de lui donner l'aire de l'espace où sera posé le gazon.
Pour tester son fils en CM2, le directeur lui demande de déterminer l'aire de l'espace en question.
Pour cela il lui fournit le plan ci-dessous où :

- Le parallélogramme FLAG représente l'espace
- Le disque $(\mathcal{D})$ représente la dalle sur laquelle est fixé le mât portant le drapeau.

Le directeur précise qu'on ne mettra pas de gazon suer la dalle.
Aide le fils du directeur.



1) Calcule l'aire de la dalle
2) Calcule l'aire de du parallélogramme FLAG
3) Détermine l'aire de la portion de l'espace où sera posé le gazon.

On prendra 3,1 comme valeur de π

<u>Corrigé</u>

1) L'aire de la dalle est l'aire du disque gris :
   Le diamètre du disque est 2 m et donc son rayon est 1 m.
   L'aire du disque est $\pi \times 1 \times 1 = 3{,}1 \times 1 \times 1 = 3{,}1\ m^2$
   L'aire de la dalle est $3{,}1\ m^2$

2) L'aire du parallélogramme FLAG (en appelant la hauteur relative au côté [GA]) est :
   $\mathrm{GA} \times h = 10 \times 4{,}5 = 45\ m^2$
   L'aire du parallélogramme FLAG est $45\ m^2$

3) L'aire de la portion de l'espace où sera posé le gazon est égale à l'aire du parallélogramme FLAG moins l'aire de la dalle :
   $45 - 3{,}1 = 41{,}9\ m^2$
   L'aire de la portion de l'espace où sera posé le gazon est $41{,}9\ m^2$