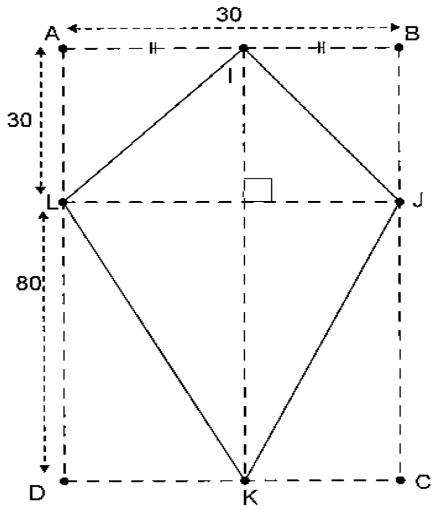
Troisième Mathématiques	CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Code :
Thème : Géométrie du plan
Leçon 4 : TRIANGLE RECTANGLE Heure : 10 heures

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour marquer leur participation à la kermesse du Lycée Moderne de Mankono, les élèves du niveau 3ème dudit établissement se proposent de fabriquer un grand cerf- volant dont la maquette IJKL réalisée par un professeur de mathématiques est ci-contre. Pour une bonne production, ils décident de déterminer les dimensions des côtés du cerf-volant et la mesure de chacun de ses angles.



B. CONTENU DE LA LEÇON

I. PROPRIÉTÉS DE PYTHAGORE

1. La propriété de Pythagore

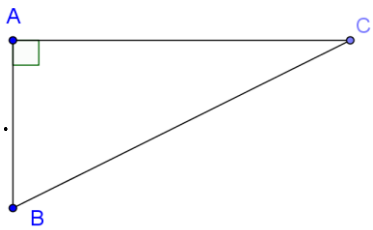
Propriété

Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Exemple

ABC est un triangle rectangle en A.

D'après la propriété de Pythagore ; $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



Exercices de fixation

Exercice 1

Choisis la bonne réponse parmi les propositions suivantes.

EFG est un triangle rectangle en E.

D'après la propriété de Phytagore:

a) $EF^2 = EG^2 + GF^2$ b) $EG^2 = EF^2 + FG^2$ c) $FG^2 = FE^2 + EG^2$.

Corrigé

a).

Exercice 2

L'unité de longueur est le centimetre.

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=4 et AC=3.

Calcule AB.

Corrigé

ABC est un triangle rectangle en A.

D'après la propriété de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Donc $BC^2 = 4^2 + 3^2$;

$BC^2 = 16 + 9$;

Alors, $BC^2 = 25$. D'où $BC = \sqrt{25} = 5$.

2. La réciproque de la propriété de Pythagore

Propriété

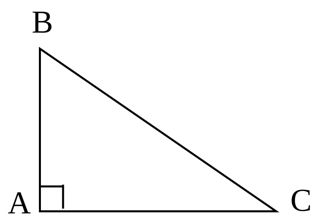
Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Exemple

ABC est un triangle.

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$

ABC est un triangle rectangle en A



Exercice de fixation

L'unité de longueur est le centimetre.

ABC est un triangle tel que : $AB = 10$; $AC = 10$ et $BC = 6$.

Justifie que le triangle ABC est rectangle en C.

Corrigé

On a: $AB^2 = (10)^2 = 10$; $AC^2 = (8)^2 = 64$ et $BC^2 = (6)^2 = 36$.

Comme $100 = 64 + 36$, alors $AB^2 = AC^2 + BC^2$ donc, d'après la réciproque de Pythagore le triangle ABC est rectangle en C.

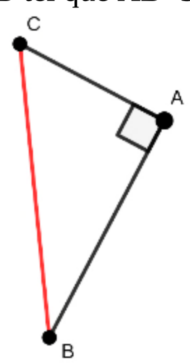
II. CONSTRUCTION D'UN SEGMENT DE LONGUEUR $\sqrt{a}$, $a > 0$

Programme de construction

Exemple 1

Pour construire un segment [BC] de longueur $\sqrt{13}$ cm sachant que $13 = 9 + 4$, on peut procéder comme suit : (En remarquant que $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$; $3^2 = 9$ et $2^2 = 4$)

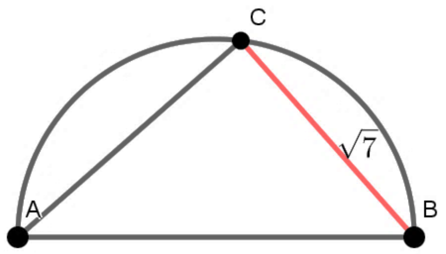
- on construit deux demi-droites de même origine A et de supports perpendiculaires ;
- sur l'une de ces deux demi-droites, on place le point B tel que AB=3 cm et sur l'autre demi-droite, on place le point C tel que AC=2 cm ;
- on trace le segment [BC] cherché.



Exemple 2

Pour construire un segment [BC] de longueur $\sqrt{7}$ cm sachant que $7 = 16 - 9$, on peut procéder comme suit :
(En remarquant que $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$; $3^2 = 9$ et $4^2 = 16$)

- on construit un demi-cercle de diamètre AB=4 cm ;
- sur ce demi-cercle, on place le point C tel que AC=3 cm ;
- on trace le segment [BC].



Exercices de fixation

Exercice 1

L'unité de longueur est le centimètre.
Sachant que $58 = 3^2 + 7^2$, construis un segment [MP] de longueur $\sqrt{58}$.
Donne ta méthode de construction que tu justifieras.

Corrigé

On sait que $58 = 3^2 + 7^2$
d'où $(\sqrt{58})^2 = 3^2 + 7^2$
Construire un segment de longueur $\sqrt{58}$ revient à construire un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 3 et 7.

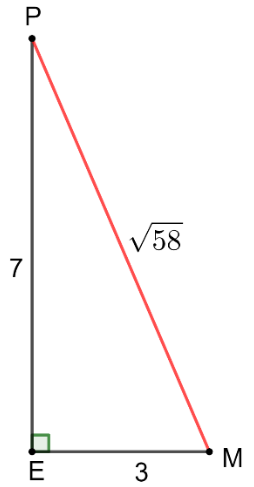
Programme de construction

- ♦ On trace un segment [EP] de longueur 7.
- ♦ On trace une droite passant par le point E et perpendiculaire à la droite (EP).
- ♦ Sur cette droite, on place le point M tel que EM = 3.
- ♦ On trace le segment [MP] cherché.

Justification

Le triangle MEP est rectangle en E.
Donc, d'après la propriété de Pythagore :
$MP^2 = EM^2 + EP^2$
$MP^2 = 3^2 + 7^2$
$MP^2 = 58$
$MP = \sqrt{58}$.

Construction



Exercice 2

Sachant que $65 = 9^2 - 4^2$, construis un segment [NQ] de longueur $\sqrt{65}$.
Donne ta méthode de construction que tu justifieras.

Corrigé

On sait que $65 = 9^2 - 4^2$.

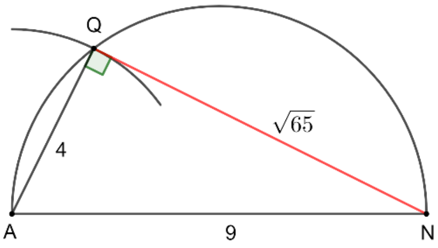
D'où $9^2 = (\sqrt{65})^2 + 4^2$.

Construire un segment de longueur $\sqrt{65}$ revient à construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 9 et l'un des côtés de l'angle droit mesure 4.

Programme de construction

- On trace un segment [NA] de longueur 9.
- On trace le demi-cercle de diamètre [NA].
- Sur cet demi-cercle et à l'aide du compas, on place le point Q tel que AQ = 4.
- On trace le segment [NQ] cherché.

Construction



Justification

Le point Q appartient au cercle de diamètre [NA]. Donc le triangle NAQ est rectangle en Q.

D'après la propriété de Pythagore :

$NA^2 = AQ^2 + NQ^2$

$9^2 = 4^2 + NQ^2$

$NQ^2 = 9^2 - 4^2$

$NQ^2 = 65$

$NQ = \sqrt{65}$.

III. PROPRIETE METRIQUE DEDUITE DE L'AIRE

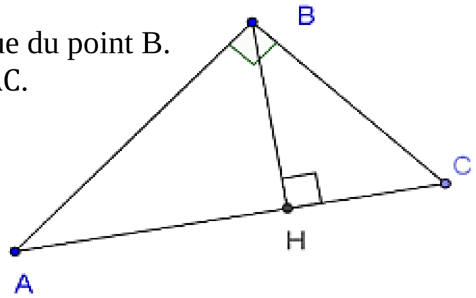
Propriété

Dans un triangle rectangle, le produit des côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse et de la hauteur passant par le sommet de l'angle droit.

Exemple

ABC est un triangle rectangle en B et H est le pied de la hauteur issue du point B.

D'après la propriété métrique déduite de l'aire : $AB \times BC = BH \times AC$.



Exercices de fixation

Exercice 1

Choisis la bonne réponse parmi les propositions suivantes.

MOP est un triangle rectangle en P.

K est le pied de la hauteur issue du point P.

D'après la propriété métrique déduite de l'aire:

a) $MK \times OP = MP \times OK$ b) $MP \times OP = MO \times PK$ c) $MO \times MP = KO \times MK$

Corrigé

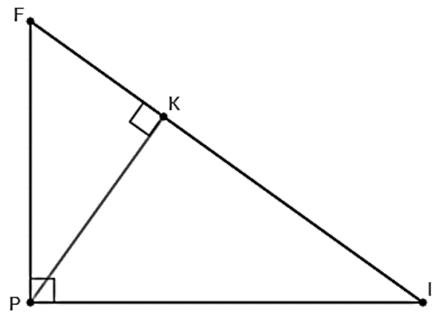
b).

Exercice 2

FIP est un triangle rectangle en P et K est la hauteur issue du sommet P.

On donne : FP = 4cm ; PI = 2cm et FI =$2\sqrt{5}$cm.

Justifie que PK=$\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



Corrigé

FIP est un triangle rectangle en P.

K est le pied de la hauteur issue du sommet P.

D'après la propriété métrique déduite de l'aire, on a : FP$\times PI = PK \times IF$.

Donc $PK = \frac{FP \times PI}{IF}$.

$PK = \frac{4\times 2}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

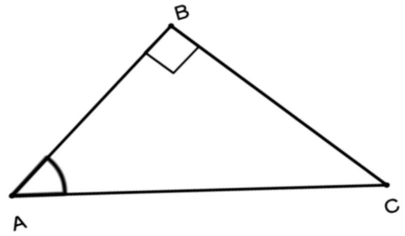
IV. SINUS ET COSINUS D'UN ANGLE AIGU DANS UN TRIANGLE

1. Sinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, on appelle sinus d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

$$sin\,\widehat{ABC} = \frac{Côté\ opposé\ à\ \widehat{ABC}}{hypoténuse}$$

Exemple



Dans le triangle ABC rectangle en B, on a : sin $\widehat{BAC} = \frac{\text{BC}}{\text{AC}}$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Choisis la bonne réponse parmi, les propositions suivantes.

IJK est un triangle rectangle en J, alors sin $\widehat{IKJ}$ est égal à :

a) $\frac{IJ}{KJ}$ b) $\frac{IJ}{IK}$ c) $\frac{JK}{IK}$

Corrigé

b).

Exercice 2

ABC est triangle rectangle en B tels que : $AB = 4\ cm; AC = 5\ cm\ et\ BC = 3\ cm$.

Calcule $sin\,\widehat{BCA}$.

Corrigé

ABC est triangle rectangle en B.

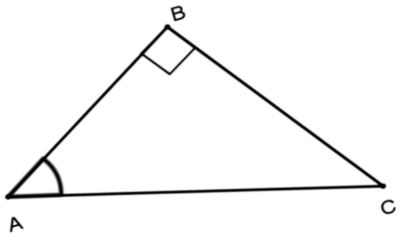
Alors, $sin\,\widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$.

2. Cosinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, on appelle cosinus d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur l'hypoténuse.

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{Côté\ adjacent\ à\ \widehat{ABC}}{hypoténuse}$$

Exemple



Dans le triangle ABC rectangle en B, on a : $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Choisis la bonne réponse parmi, les propositions suivantes.

OPQ est un triangle rectangle en O, alors $\cos \widehat{OPQ}$ est égal à :

a) $\frac{OP}{OQ}$ b) $\frac{PQ}{OQ}$ c) $\frac{OP}{PQ}$

Corrigé

c).

Exercice 2

ABC est triangle rectangle en B tels que : $AB = 4\ cm; AC = 5\ cm\ et\ BC = 3\ cm$

Calcule $\cos \widehat{BAC}$.

Corrigé

ABC est triangle rectangle en B. Alors, on a $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$.

3. Propriétés

a. Propriétés du sinus et cosinus d'un angle

Pour tout angle aigu de mesure $a°$, on a :

- $0 < \sin a° < 1$;
- $0 < \cos a° < 1$;
- $\sin^2 a° + \cos^2 a° = 1$.

b. Sinus et cosinus de deux angles complémentaires

Propriété

Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

Autrement dit, si $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont deux angles tels que $mes\hat{A} + mes\hat{B} = 90°$ alors :

$\sin \hat{A} = \cos \hat{B}$ et $\cos \hat{A} = \sin \hat{B}$.

Exercice de fixation

On donne $\cos 23° = 0{,}9205$ et $\sin 51° = 0{,}771$.

Détermine une valeur approchée de $\sin 67°$ et $\cos 39°$.

Corrigé

On a: $23° + 67° = 90°$ donc, $\sin 67° = \cos 23° = 0{,}9205$.

De même $\cos 39° = \sin 51° = 0{,}771$.

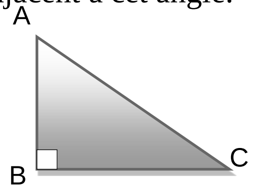
V. TANGENTE D'UN ANGLE AIGU

1. Définition

Dans un triangle rectangle, on appelle tangente d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur le côté adjacent à cet angle.

Dans le triangle ABC rectangle en B, on a :

$tan\,\widehat{BAC} = \frac{\text{Côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{Côté adjacent à } \widehat{BAC}} = \frac{BC}{AB}$



2. Propriété

La tangente d'un angle aigu est égale au quotient du sinus de cet angle par son cosinus.

Autrement dit ; si $\hat{A}$ est un angle aigu, on a : $tan\,\hat{A} = \frac{sin\hat{A}}{cos\hat{A}}$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Choisis la bonne réponse parmi, les propositions suivantes.

RST est un triangle rectangle en R, alors tan $\widehat{RST}$ est égal à :

a) $\frac{RS}{ST}$ b) $\frac{TR}{RS}$ c) $\frac{TS}{TR}$

Corrigé

b).

Exercice 2

ABC est un triangle rectangle en B.

Calcule $tan\,\hat{A}$ lorsque :

a) $sin\,\hat{A} = \frac{1}{3}$ et $cos\,\hat{A} = \frac{3\sqrt{2}}{3}$. b) $sin\,\hat{A} = \frac{3}{5}$ et $cos\,\hat{A} = \frac{4}{5}$.

Corrigé

a) $tan\,\hat{A} = \frac{sin\hat{A}}{cos\hat{A}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$. b) $tan\,\hat{A} = \frac{sin\hat{A}}{cos\hat{A}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$.

VI. UTILISATION DE LA TABLE TRIGONOMETRIQUE

On utilise la table trigonométrique pour:

- trouver le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle donné.

Exemple

On lit dans la table trigonométrique au millième près,

sin 12° ≈ 0,208, cos 71 ° ≈ 0,326 et tan 15° ≈ 0,268 .

Exercice de fixation

Utilise la table trigonométrique pour donner un arrondi au millième près de : cos 10° ; sin 32° ; sin 72° et cos 53°.

Corrigé

cos 10°≈0,985 ; sin 32° ≈0,540 ; sin 72°≈0,951 et cos 53°≈0,602.

.

Extrait de la table trigonométrique

degré	sin	cos	tan	1/tan	
12	0,208	0,978	0,213	4,705	78
13	0,225	0,974	0,231	4,331	77
14	0,242	0,970	0,249	4,011	76
15	0,259	0,966	0,268	3,732	75
16	0,276	0,961	0,287	3,487	74
17	0,292	0,956	0,306	3,271	73
18	0,309	0,951	0,325	3,078	72
19	0,326	0,946	0,344	2,904	71
	cos	sin	1/tan	tan	degré

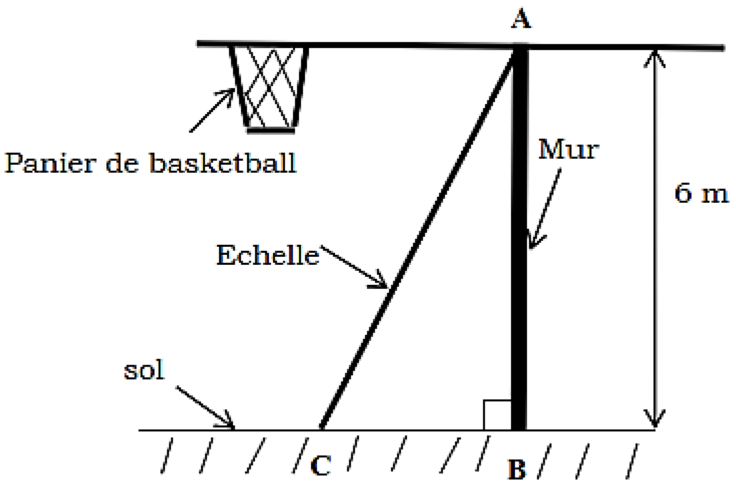
- encadrer la mesure d'un angle par deux mesures d'angle consécutives connaissant soit son sinus, soit son cosinus ou sa tangente.

Exemple
A l'aide de la table trigonométrique, donne un encadrement de mes $\widehat{F}$ sachant que cos $\widehat{F}$ = 0,302.
A partir de la table trigonométrique, on a : 0,292 < 0,302 < 0,309.
Alors, cos 73° < cos $\widehat{F}$ < cos 72° , donc 72° < mes $\widehat{F}$ < 73°.

C. SITUATION D'EVALUATION

Pour participer à un tournoi communal de basketball organisé par le maire, le président des jeunes veux installer un panier de basket pour l'entrainement de l'équipe du quartier.
Le président des jeunes veut fixer le panier de basquet sur un mur à 6 m du sol.
Il dispose d'une échelle qui mesure 6,5 m de long.
Un maçon indique que le panier sera bien placé si l'angle formé par l'échelle et le sol est compris entre 60° et 70°.

1. Détermine la distance entre le pied du mur et le point d'appui de l'échelle.
2. Calcule le sinus de l'angle formé par l'échelle et le sol (sin $\widehat{ACB}$).
3. Dis si le panier sera bien placé.



Extrait de table trigonométrique

Angle	65	66	67	68	69	70
cos	0,423	0,407	0,391	0,375	0,358	0,342
sin	0,906	0,914	0,921	0,927	0,934	0,940

Corrigé

1. Considérons le triangle ABC rectangle en B .

D'après la propriété de Pythagore $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
d'où $BC^2 = AC^2 - AB^2$
$= 6{,}5^2 - 6^2$
$= 6{,}25$
Donc $BC = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.
D'où la distance entre le pied du mur et le point d'appui de l'échelle est de 2,5 m.

2. Considérons le triangle ABC rectangle en B.

Alors, $\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}$

$= \frac{6}{6,5} \approx 0,923.$

Encadrons $mes\ \widehat{ACB}$ par entire consécutifs.

On a 0,921 < 0,923 < 0 ,927, donc sin 67°< sin $\widehat{ACB}$ < sin 68°.

D'où 67°< mes $\widehat{ACB}$ < 68°.

Comme 67°< mes $\widehat{ACB}$ < 68°, alors l'angle formé par l'échelle et le sol est compris entre 60° et 70°. Donc, le panier sera bien placé.

D. EXERCICES

D-1 EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Recopie puis complète les propriétés suivantes.

1. « Si …….., alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$».
2. « Si un triangle RST est rectangle en S, alors ……. ».
3. « Si ……, alors $AB^2 = BC^2 + AC^2$ ».

Corrigé

1. « Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$».
2. « Si un triangle RST est rectangle en S, alors $RT^2 = RS^2 + ST^2$ ».
3. « Si un triangle ABC est rectangle en C, alors $AB^2 = BC^2 + AC^2$ ».

Exercice 2

L'unité de longueur est le centimetre.

DEF est un triangle rectangle en D, tel que: DE=5 et DF=12.

Calcule EF.

Corrigé

DEF est un triangle rectangle en D.

D'après la propriété de Pythagore, $EF^2 = ED^2 + DF^2$.

Donc $EF^2 = 5^2 + 12^2$;

$EF^2 = 25 + 144$;

Alors, $EF^2 = 169$. D'où $EF = \sqrt{169} = 13$.

Exercice 3

L'unité de longueur est le centimetre.

MNP est un triangle rectangle en M, tel que: NP=10 cm et MP=8 cm.

Calcule MN.

Corrigé

MNP est un triangle rectangle en M.

D'après la propriété de Pythagore, $NP^2 = MN^2 + MP^2$.

Donc $MN^2 = NP^2 - MP^2$;

$MN^2 = 10^2 - 8^2$;

$MN^2 = 100 - 64$.

Alors, $MN^2 = 36$. D'où $MN = \sqrt{36} = 6$.

Exercice 4

Recopie puis complète les propriétés suivantes.

1. « Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ...... est rectangle en ……. ».
2. « Si $LN^2 = LM^2 + NM^2$, alors le triangle ….. est rectangle en …… ».
3. « Si $DF^2 = FE^2 + DE^2$, alors le triangle ……. Est rectangle en …… ».

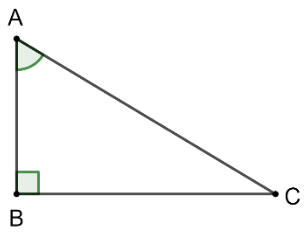
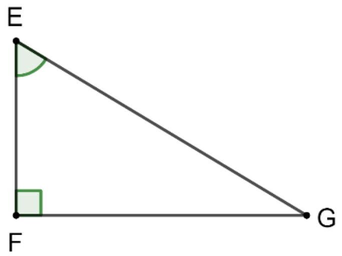
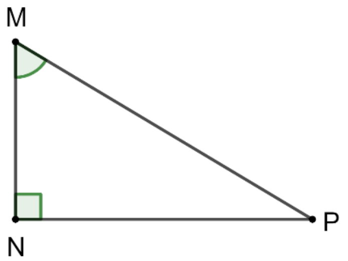
Corrigé

1. « Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A ».
2. « Si $LN^2 = LM^2 + NM^2$, alors le triangle LMN est rectangle en M ».
3. « Si $DF^2 = FE^2 + DE^2$, alors le triangle DEF Est rectangle en E ».

Exercice 5

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est juste.

Recopie le numéro de la ligne et la letter correspondante à l'affirmation juste.

N°	Affirmations	Réponses		
		a	b	c
1	 sin $\widehat{BAC}$ est égal à	$\dfrac{AB}{AC}$	$\dfrac{BC}{AC}$	$\dfrac{AB}{BC}$
2	 cos $\widehat{FEG}$ est égal à	$\dfrac{EF}{EG}$	$\dfrac{FG}{EG}$	$\dfrac{EF}{FG}$
3	 tan $\widehat{NMP}$ est égal à	$\dfrac{MN}{MP}$	$\dfrac{MN}{NP}$	$\dfrac{NP}{MN}$

Corrigé

1-b ; 2-a ; 3-c.

Exercice 6
L'unité de longueur est le centimetre.
ABC est un triangle rectangle en A, tel que AB=6, AC=8 et BC=10.
Calcule:
sin $\hat{B}$; cos $\hat{B}$; tan $\hat{B}$.

Corrigé
ABC est triangle rectangle en A. Alors, on a:

- $sin\,\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.
- $cos\,\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.
- $tan\,\hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

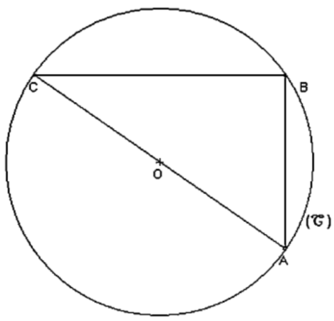
D-2 EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 7
L'unité de longueur est le centimètre.
MNP est un triangle rectangle en P tel que : MN $= 8$ et mes $\widehat{\mathrm{MNP}} = 30°$.
On donne $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 30° = \frac{1}{2}$ et $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Calcule MP et PN.

Corrigé
MNP est un triangle rectangle en P.
Alors, on a $\sin \widehat{\mathrm{MNP}} = \frac{MP}{MN}$, d'où $MP = MN \times \sin \widehat{MNP}$.
Donc, $MP = 8 \times \sin 30° = 8 \times \frac{1}{2} = 4$.
On a $\cos \widehat{NMP} = \frac{NP}{MN}$, d'où $PN = MN \times \cos \widehat{NMP}$.
Donc, $PN = 8 \times \cos 30° = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Exercice 8
L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur,
ABC est un triangle inscrit dans le cercle (C) de centre O et de diamètre [AC].
On donne : $AB = 4\sqrt{3}$; $AC = 8$; $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Justifie que ABC est un triangle rectangle en B.
2. Justifie que $\sin \widehat{ACB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.



Corrigé

1. Le triangle ABC est inscrit dans le cercle (C) et son côté [AC] est un diamètre du cercle (C), donc ABC est un triangle rectangle en B.
2. Considérons le triangle ABC, rectangle en B.

   Alors on a : $\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Comme $\sin \widehat{ACB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors, mes $\widehat{ACB} = 60°$.

Exercice 9

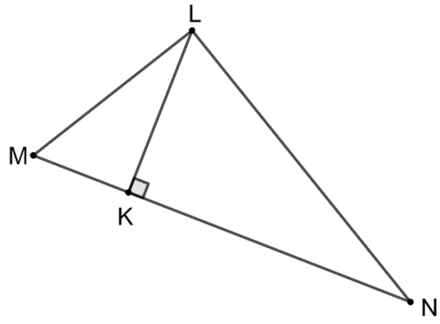
L'unité de longueur est le centimètre.

On considère la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur :

On donne MN=8 ; ML=4,8 et LN=6,4.

1. Démontre que LMN est un triangle rectangle en L.
2. K est le pied de la hauteur issue du sommet L.

Calcule LK.



D-3 Exercices d'approfondissement

Exercice 10

L'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur, ABCD est un rectangle.

M est un point de [AB].

On donne AB=18,4 ; AD=7,2 et DM=7,8.

1. Justifie que AM=3 et que MC=7,8.
2. Le triangle DMC est-il rectangle ? Justifie ta réponse.

Exercice 11

Pour mieux éclairer devant la salle des professeurs, monsieur YEO l'électricien, veut fixer une ampoule devant la porte. Pour cela, il dispose d'une échelle de 4m et la porte a une hauteur de 2m.

En vu de prendre des précautions, il veut savoir la mesure de l'angle formé par l'échelle et le sol.

A quelle distance du pied de la porte doit-il placer l'échelle pour que son sommet soit juste au niveau de la porte ?

Détermine l'angle formé par l'échelle et le sol.