Troisième

Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

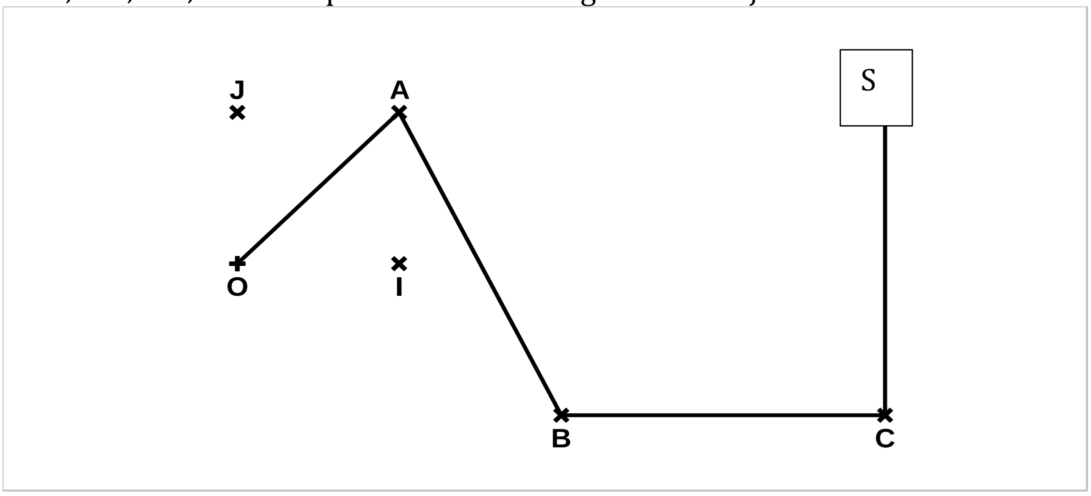
Code :

<u>THEME</u>: GEOMETRIE DU PLAN

<u>LEÇON 9</u> : COORDONNEES D'UN VECTEUR   Durée : 6 heures

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Les élèves d'une classe de 3eme d'un établissement secondaire décident de faire une sortie détente. A cet effet, les organisateurs s'informent auprès du service technique de la commune du site d'accueil (Point S) et ils reçoivent un extrait du trajet OABCS à parcourir, fait à l'échelle 1/2500.
Les organisateurs rendent compte à la classe. Tous les participants veulent alors connaître la distance de l'établissement (Point O) au point S.
Connaissant l'emplacement des points O, I et J des trois villes, ils s'organisent pour repérer les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CS}$ et $\overrightarrow{OS}$ puis calculer la longueur du trajet OABCS.



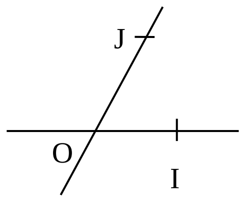
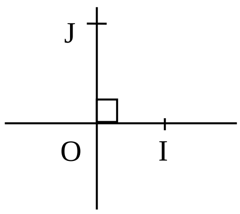
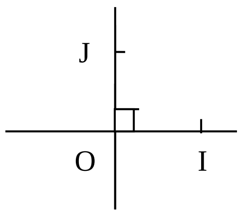
B- <u>CONTENU DE LA LEÇON</u>

I. Coordonnées d'un vecteur

1. Repère

<u>Présentation</u>

Un repère du plan est un triplet (O, I, J) de points distincts non alignés. Il existe plusieurs types de repères :

• **Le repère quelconque** 	• **Le repère orthogonal** ((OI)⊥(OJ) et OI≠OJ) 	• **Le repère orthonormé** ((OI) ⊥ (OJ) et OI=OJ) 

Vocabulaire
Dans chacun des cas :
- La droite (OI) représente l'axe des abscisses.
- La droite (OJ) représente l'axe des ordonnées.

2. Coordonnées d'un point

a) Coordonnées d'un point

Définitions

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit le point A(x; y).

- L'écriture (x ; y) désigne le couple des nombres réels x et y.

x est le **premier terme** du couple et ***y*** est **le deuxième** terme du couple.

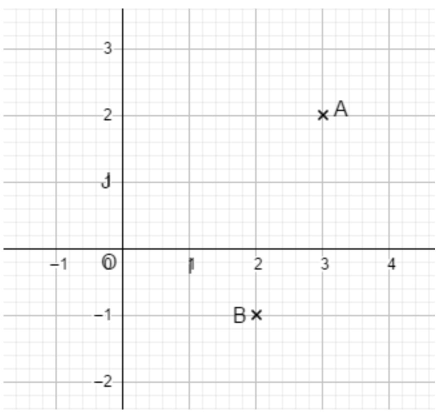
- Dans l'écriture A(x; y), ***x*** est **l'abscisse** du point A et ***y*** est **l'ordonnée** du point A.

On dit que (***x***; ***y***) est le **couple de coordonnées** du point A dans le repère (O, I, J).

- L'ensemble formé de tous les couples de nombres réels est noté ℝ x ℝ. On lit ℝ **croix** ℝ.

Exemples

- A a pour abscisse 3 et pour ordonnée 2.
  On note A(3 ; 2).
  (**3** ; **2**) est le **couple de coordonnées** du point A dans le repère (O, I, J).
- B a pour abscisse 2 et pour ordonnée -1.
  On note B(2 ; -1).
  (**2**; **−1**) est le **couple de coordonnées** du point B dans le repère (O, I, J).

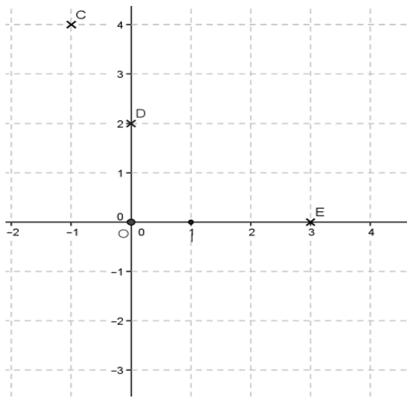


Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

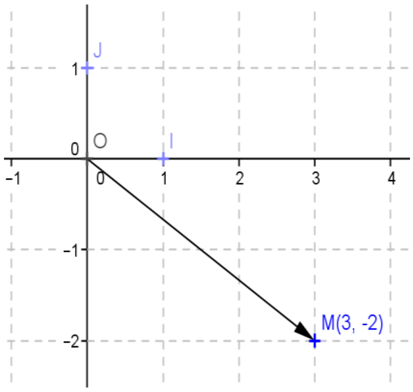
a) Place le point M(3; −2).

b) Détermine les coordonnées de chacun des points C, D, E et O.



Corrigé

a)



b) Les coordonnées des points sont : C(-1 ; 4), D(0 ; 2) , E(3 ; 0) et O(0 ; 0).

b) Égalité de couples de nombres réels

Propriété

Les couples (x ; y) et (x' ; y') sont égaux, équivaut à : $x = x'$ et $y = y'$.

Exemple

(x ; 2) = (4 ; y) équivaut à $x = 4$ et $y = 2$.

Remarque

Les couples (4 ; 2) et (2 ; 4) ne sont pas égaux.

Exercice de fixation

Détermine x et y dans chaque cas pour que les couples ci-dessous soient égaux.

a) $(x+1\,;-3)$ et $(-2\,;\ y-5)$;

b) $(-5\,;3y)$ et $(2x\,;4)$.

Corrigé

a) $(x+1\,;-3)$ et $(-2\,;\ y-5)$ sont égaux équivaut à : $x+1=-2$ et $-3=y-5$.
$(x+1\,;-3)$ et $(-2\,;\ y-5)$ sont égaux équivaut à : $x=-3$ et $y=2$.

b) $(-5\,;3y)$ et $(2x\,;4)$ sont égaux équivaut à : $-5=2x$ et $3y=4$.
$(-5\,;3y)$ et $(2x\,;4)$ sont égaux équivaut à : $x=\frac{-5}{2}$ et $y=\frac{4}{3}$

3. Couple de coordonnées d'un vecteur

Définition

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). A et B sont des points du plan.

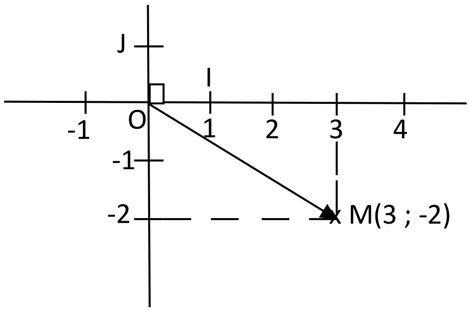
On appelle couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le couple de nombres réels $(x\,;y)$ tel que :

$\overrightarrow{AB}=x.\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$.

On écrit : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{AB}(\boldsymbol{x}\,;\ \boldsymbol{y})$.

Exemples

- L'écriture $\overrightarrow{AB}=2.\overrightarrow{OI}-3.\overrightarrow{OJ}$ montre que **(2 ;-3)** est **le couple de coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On écrit : $\overrightarrow{AB}\binom{2}{-3}$.
- Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne M (3 ; -2).



Sur la figure ci-contre, $\overrightarrow{OM} = 3.\overrightarrow{OI} - 2.\overrightarrow{OJ}$.
Donc le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le point M ont le même couple de coordonnées.

Remarque

Le vecteur nul a pour couple de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice de fixation

Dans chacun des cas suivants, identifie le couple de coordonnés du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

a) $\overrightarrow{CD} = -3.\overrightarrow{OI} - 7.\overrightarrow{OJ}$; b) $\overrightarrow{CD} = \sqrt{2}.\overrightarrow{OI} + 2.\overrightarrow{OJ}$; c) $\overrightarrow{CD} = -6.\overrightarrow{OI}$; d) $\overrightarrow{CD} = 9.\overrightarrow{OJ}$.

Corrigé

Les couples de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont :

a) (-3 ; -7) ; b)($\sqrt{2}$; 2) ; c)(-6 ; 0) ; d)(0 ; 9).

4. Représentation d'un vecteur

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne un point A.

Point méthode

Pour construire le vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que $\overrightarrow{AB}(a\,;b)$, on peut procéder comme suit :

- on exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OI}$ et du vecteur $\overrightarrow{OJ}$ ($\overrightarrow{AB} = a.\overrightarrow{OI} + b.\overrightarrow{OJ}$, où a et b sont des nombres réels) ;
- on place le point A dans le repère donné ;
- on marque le point C tel que : $\overrightarrow{AC} = a.\overrightarrow{OI}$;
- on marque le point B tel que : $\overrightarrow{CB} = b.\overrightarrow{OJ}$.

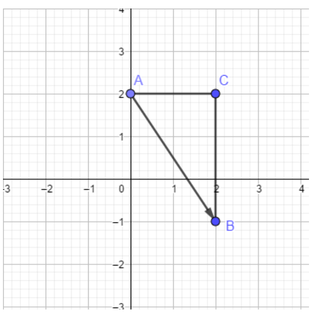
Exercices de fixation

Exercice 1

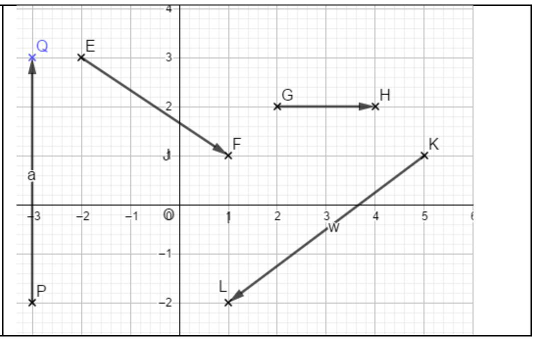
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne le point A(0 ; 2).
Construis le vecteur $\overrightarrow{AB}\,\binom{2}{-3}$.

Corrigé

On sait que $\overrightarrow{AB}\,\binom{2}{-3}$; donc $\overrightarrow{AB} = 2.\overrightarrow{OI} - 3.\overrightarrow{OJ}$.
- On place le point A dans le repère donné ;
- On marque le point C tel que : $\overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{OI}$;
- On marque le point B tel que : $\overrightarrow{CB} = -3.\overrightarrow{OJ}$.



Exercice 2

Détermine le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{PQ}$ représentés dans le repère ci-contre.	

Corrigé

$\overrightarrow{EF} = 3\,\overrightarrow{OI} - 2\,\overrightarrow{OJ}$ donc $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{GH} = 2\,\overrightarrow{OI} + 0\,\overrightarrow{OJ}$ donc $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{KL} = -4\,\overrightarrow{OI} - 3\,\overrightarrow{OJ}$ donc $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{PQ} = 0\,\overrightarrow{OI} + 5\,\overrightarrow{OJ}$ donc $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$.

5. Vecteurs égaux

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). A, B, C et D sont des points du plan tels que $\overrightarrow{AB}(x\,;\,y)$ et $\overrightarrow{CD}$ $(x'\,;\,y')$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, équivaut à $\boldsymbol{x = x'}$ et $\boldsymbol{y = y'}$.

Exercice de fixation

Détermine les nombres a et b pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}a-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8\\-5-b\end{pmatrix}$ soient égaux.

Corrigé

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}a-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8\\-5-b\end{pmatrix}$ sont égaux, équivaut à : $a-3=8$ et $4=-5-b$.

équivaut à : $a=8+3$ et $b=-5-4$.

équivaut à: $a=11$ et $b=-9$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsque : $a=11$ et $b=-9$.

Conséquence

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). A et B sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB}(x\,;\,y)$.
$\overrightarrow{AB} = \vec{O}$ équivalent à $x = 0$ et $y = 0$.

II. Coordonnées d'une somme de vecteurs

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). A, B, A' et B' sont des points du plan tels que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'B'}\right)\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Exercice de fixation

Soit $\overrightarrow{AB}\binom{2}{3}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{-6}{3}$. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Corrigé

On a $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})\binom{2+(-6)}{3+3}$; donc : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})\binom{-4}{6}$.

III. Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soient A et B deux points du plan et k un nombre réel.
Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **alors** $k.\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exercice de fixation

Soit $\overrightarrow{AB}\binom{-5}{10}$. Détermine les coordonnées du vecteur - 4 $\overrightarrow{AB}$.

Corrigé

On a $\overrightarrow{AB}\binom{-5}{10}$ et $-4\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4\times(-5) \\ -4\times(10) \end{pmatrix}$; donc : $-4\overrightarrow{AB}\binom{20}{-40}$.

IV. Vecteurs colinéaires - Vecteurs non nuls orthogonaux

1. Vecteurs colinéaires

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - x'y = 0$.

Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{-1}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
Vérifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Corrigé

On a : $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{-1}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
Calculons $xy' - x'y$.

$-3 \times \sqrt{2} - (-1) \times (3\sqrt{2}) = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 0$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2. Vecteurs non nuls orthogonaux

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont deux vecteurs non nuls.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + y'y = 0$.

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{-2}{4}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{2}{1}$.
Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Corrigé

$\overrightarrow{AB}\binom{-2}{4}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{2}{1}$

Calculons $xx' + y\,y'$.

(-2) × 2 + 4 × 1= - 4 + 4 = 0.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Remarques

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs.

- Si $xy' - x'y \neq 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
- Si $xx' + y'y \neq 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux.

V. Calculs dans un repère

1. Calcul des coordonnées d'un vecteur

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). A et B sont deux points du plan.

Si $A(x\,;\ y)$ **et** B $(x'\,; y')$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$.

Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points A(*-2 ; 3)* et B (*1 ; 2)*.

Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Corrigé

On sait que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$.

En remplaçant par les valeurs, on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 2-3 \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Calcul des coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). K est le milieu du segment [AB].

Si $A(x\,;\ y)$ **et** B $(x'\,; y')$ alors K $(\frac{x+x'}{2}\ ; \frac{y+y'}{2})$.

Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne deux points A(*2 ;* -3) et B($\frac{3}{2}$ *;* -5).

Détermine les coordonnées du milieu K du segment [AB].

Corrigé

Déterminons les coordonnées de K.

On sait que : $K\ (\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2})$.

En remplaçant par les valeurs, on a : $K(\frac{2+\frac{3}{2}}{2}; \frac{-3-5}{2})$.

Donc $K\left(\frac{7}{4}; -4\right)$.

3. Distance de deux points dans un repère orthonormé

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). A et B sont deux points du plan.

Si $A(x\ ;\ y)$ **et** B $(x'\ ;\ y')$ alors AB = $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$.

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne L(2 ; -2) et M(5 ; -1). Calcule la distance LM.

Corrigé

On a $\mathrm{LM} = \sqrt{(x_M - x_L)^2 + (y_M - y_L)^2}$.
En remplaçant par les valeurs, on a $\mathrm{LM} = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-(-2))^2}$.
Après calculs, on obtient $\mathrm{LM} = \sqrt{10}$.

C. SITUATION D'EVALUATION

A l'occasion de la préparation de l'examen du BEPC, le professeur de mathématiques de Franck propose cette activité pour vérifier ses acquis.
« (O, I, J) est un repère du plan. A (1 ; -1) ; B (-2 ; 0) ; C (-3 ; -3) et E(4 ; -2) sont trois points du plan. D est le symétrique de B par rapport à A . Les droites (AC) et (ED) sont-elles parallèles ? ».
Soucieux de réussir absolument son examen, Franck sollicite l'aide de son voisin de classe pour répondre à la question du professeur.

1- Justifie que le point D a pour coordonnées (4 ; -2).
2- Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$.
3- Réponds à la préoccupation du professeur.

Corrigé

1- Coordonnées du point D

A est le milieu du segment $[BD]$.

On a : $A\left(\frac{x_B+x_D}{2};\ \frac{y_B+y_D}{2}\right)$ donc, $A\left(\frac{-2+x_D}{2};\ \frac{y_D}{2}\right)$ et $A(1;-1)$.

$A\left(\frac{-2+x_D}{2};\ \frac{y_D}{2}\right)$ et $A(1;-1)$ sont égaux équivaut à : $\frac{-2+x_D}{2} = 1$ et $\frac{y_D}{2} = -1$

$A\left(\frac{-2+x_D}{2};\ \frac{y_D}{2}\right)$ et $A(1;-1)$ sont égaux équivaut à : $x_D = 4$ et $y_D = -2$.

Donc : $D\binom{4}{-2}$.

2- Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$.

On a : $\overrightarrow{AC}\binom{-3-1}{-3+1}$, donc : $\overrightarrow{AC}\binom{-4}{-2}$.

On a : $\overrightarrow{ED}\binom{4+4}{-2+6}$, donc : $\overrightarrow{ED}\binom{8}{4}$.

3-Répondons à la préoccupation du professeur.

Les deux droites (AC) et (ED) sont parallèles lorsque les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires. On a : $\overrightarrow{AC}\binom{-4}{-2}$ et $\overrightarrow{ED}\binom{8}{4}$.
$-4 \times 4 - (-2) \times 8 = -16 + 16 = 0$; les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires.
Par conséquent, les droites (AC) et (ED) sont parallèles.

D. EXERCICES

D-1. Exercices de fixation

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

On donne les vecteurs : $\overrightarrow{AB}\binom{2}{1}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{6}{3}$.

Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Corrigé

Justifions que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

$2 \times 3 - 1 \times 6 = 6 - 6 = 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{3}{5}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{5}{-3}$.

Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Corrigé

$3 \times 5 + 5 \times (-3) = 15 - 15 = 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On donne $\overrightarrow{EF}$ (- 3 ; 2) et $\overrightarrow{GH}$ (4 ; -7).

Calcule les coordonnées du vecteur : $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{\mathrm{GH}}$.

Corrigé

En appliquant la propriété du cours, on obtient :

$(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{\mathrm{GH}})\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne $\overrightarrow{EF}$ (5 ; 2).

a) Détermine les coordonnées du vecteur 2 $\overrightarrow{EF}$.

b) Détermine les coordonnées du vecteur -4 $\overrightarrow{EF}$.

Corrigé

En appliquant la propriété du cours, on obtient :

a) $2\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$.

b) $-4\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-20\\-8\end{pmatrix}$.

Exercice 5

Dans les questions suivantes, indique-la (ou les) réponse(s) exacte(s) parmi les quatre réponses proposées.

1. Soit les points A(-3 ;-2) ; B(2 ;-1) et C(3 ; 2) d'un repère.
   ABCD est un parallélogramme si :

A	b	c	d
D(-4 ;-5)	D(-2 ;1)	D(8 ;3)	D(-8 ;-3)

2. Les vecteurs $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\x\end{pmatrix}$ sont colinéaires si :

a	B	c	d
$x=\frac{-2}{9}$	x = -3	x = 9	x = -9

3. Soit les points A(-4 ; 2), B(1 ; -1) et C(5 ; y) d'un plan muni d'un repère (O, I, J).
Les points A, B et C sont alignés si :

a	B	c	d
$y=\frac{-17}{5}$	$y=\frac{17}{5}$	$y=\frac{37}{5}$	$y=\frac{-37}{5}$

4. Soit les points A(-3 ; 5), B(1 ;-7) et C(-1 ;-1) d'un repère. On a :

A	b	c	d
B est le symétrique de A par rapport au point C	A est le symétrique de C par rapport au point B	C est le milieu de [AB]	B est le milieu de [AC]

5. Soit les points A(-2 ; 5), B(-2 ;-1) et C(6 ; 3) dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Dans le triangle ABC, la médiane issue de A coupe le segment [BC] en K. Donc la longueur AK est :

a	b	C	d
$4\sqrt{2}$	4	5,6	8

Exercice 6

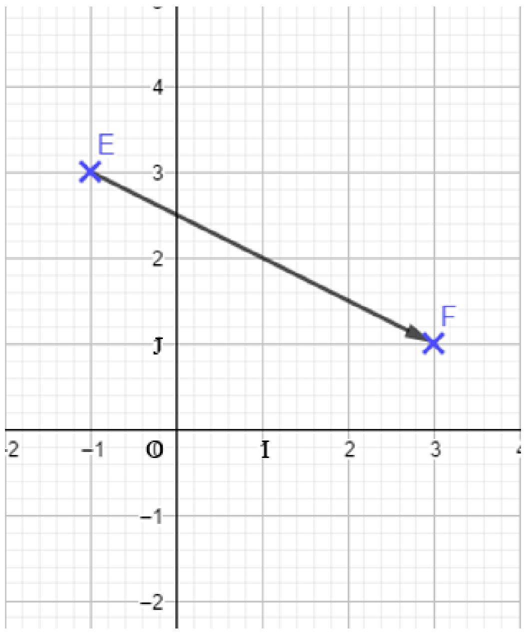
O, I et J sont trois points du plan. Identifie chaque repère à partir des informations contenues dans le tableau ci-dessous :

N°	Informations	Réponses
1	(OI) $\perp$ (OJ) et OI = OJ	
2	(OI) et (OJ) sont sécantes et OI = OJ	
3	(OI) et (OJ) sont sécantes et OI $\neq$ OJ	
4	(OI) $\perp$ (OJ) et OI $\neq$ OJ	

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne le point E(-1 ; 3).
Construis le vecteur $\overrightarrow{EF}$ tel que $\overrightarrow{EF}\ \binom{4}{-2}$.
Corrigé

Après la construction, on obtient la figure ci-contre.



Exercice 9

Détermine les nombres a et b pour que le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\b\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}a-2\\-5\end{pmatrix}$ soient égaux.

Corrigé

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}a-2\\-5\end{pmatrix}$ sont égaux, équivaut à : 3=a-2 et b=-5

équivaut à: $a = 5$ et b = -5

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsque : $a = 5$ et b = -5.

Exercice 10

Pour chaque affirmation, trois réponses sont proposées dont une seule est juste. Entoure la bonne réponse.

	Affirmation	Proposition a	Proposition b	Proposition c
1	Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), le couple de coordonnées de $\overrightarrow{RS} = 3\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$ est	(2 ; 3)	(-3 ; 2)	(3 ; -2)
2	(a ; b) = (3 ; -4) équivaut à	a = 3 et b = -4	a = -4 et b = 3	a = 3 ou b = -4
3	Si $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-2\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ alors	$3\times\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-6\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$	$3\times\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-6\\3\sqrt{3}\end{pmatrix}$	$3\times\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-6\\\sqrt{9}\end{pmatrix}$
4	$\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux	$xy + x'y' = 0$	$xy' + x'y = 0$	$xx' + yy' = 0$

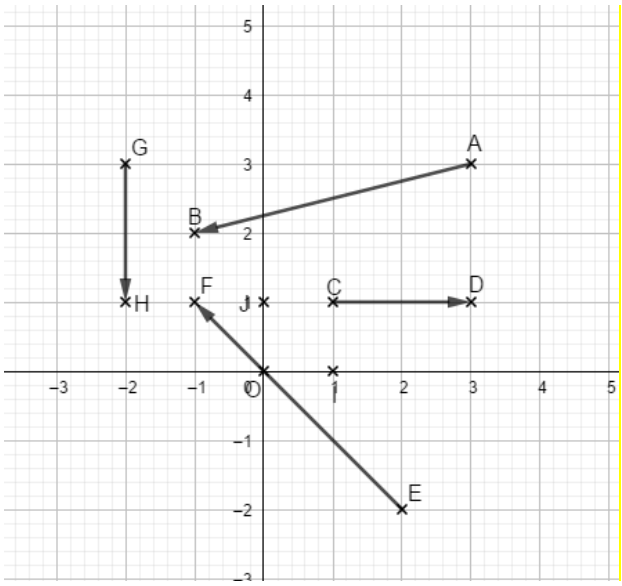
Exercice 11

(O, I, J) est un repère du plan. A et B sont deux points du plan.
Dans chacun des cas suivants, donne les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{OI} - 3\overrightarrow{OJ}$
2) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OI}$
3) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OJ}$

Exercice 12

Détermine les couples de coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$.



<u>Exercice</u> 12

Dans chacun des cas suivants, calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{LM}$.

1) L(2 ; 3) et M(-5 ; -3) ; 3) L(-1 ; 4) et M(-7 ; -3)

2) L($\sqrt{2}$; 3) et M(2 ; -3) ; 4) L(0 ; -4) et M(-7 ; 0)

<u>Exercice</u> 13

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On donne les points A(3 ; -1) ; B(-3 ; 4) ; C(4 ; 0) ; D(-3 ; -3)

Détermine le couple de coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}$.

<u>Exercice</u> 14

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On donne les vecteurs $\overrightarrow{AC}\binom{2}{9}$ et $\overrightarrow{DB}\binom{-5}{4}$.

Détermine les coordonnées des vecteurs $\frac{1}{3}.\overrightarrow{AC}$; $-\overrightarrow{DB}$; $\sqrt{3}\,.\,\overrightarrow{AC}$.

<u>Exercice</u> 15

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J).

Calcule les coordonnées des points I, J, K, milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CD].

<u>Exercice</u> 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).

On donne les points N(-5 ; -1) ; P(-3 ; 3) ; Q(-3 ; 0) et R(-3 ; -3).

Calcule les distances NP ; PQ et RQ.

<u>Exercice</u> 17

Dans un repère (O, I, J), A, B, C et D sont des points non alignés. On donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\x+4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}y-2\\1\end{pmatrix}$ x et y étant des nombres réels.

On suppose que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux. Démontre que x = -3 et y = 4.

<u>Exercice</u> 18

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. Les points A, B, C et D sont tels que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

1) Calcule le couple de coordonnées de chacun des vecteurs suivants :

$2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$, $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$.

2) Soit E et F deux points du plan tel que : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Détermine x pour que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ soient colinéaires.

b) Détermine x pour que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient orthogonaux.

<u>Exercice</u> 19

Dans un repère (O, I, J), on donne les points A(3 ; 2), B(-2 ; 1) et C(4 ; 3).

a) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OC}$.
b) Soit E(x ;-2) où x est un nombre réel. Détermine x pour que les points A, B et E soient alignés.

D-2. Exercices de renforcement

Exercice 20

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), on donne les points N(-5 ; -1) ; P(-3 ; 3) et Q(-3 ; 0).

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{PQ}$.
2. Calcule les coordonnées des points T et V, milieux respectifs des segments $[NP]$ et $[PQ]$.
3. Calcule les distances NP et PQ.

Corrigé

1) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{PQ}$.

$\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} x_P - x_N \\ y_P - y_N \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} -3-(-5) \\ 3-(-1) \end{pmatrix}$,donc $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} -3-(-3) \\ 0-3 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2) Calculons les coordonnées des points T et V milieux respectifs des segments $[NP]$ et $[PQ]$.

$T\left(\frac{x_N+x_P}{2}; \frac{y_N+y_P}{2}\right)$, on a : $T\left(\frac{-5-3}{2}; \frac{-1+3}{2}\right)$, donc $T\ (-4; 1)$.

$V\left(\frac{x_P+x_Q}{2}; \frac{y_P+y_Q}{2}\right)$, on a : $T\left(\frac{-3-3}{2}; \frac{3+0}{2}\right)$, donc $T\ \left(-3; \frac{3}{2}\right)$.

3) Calculons les distances NP et PQ.

$$\begin{aligned} \text{NP} &= \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2} \\ &= \sqrt{(-3-(-5))^2 + (3-(-1))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

Donc : $NP = 2\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} \text{PQ} &= \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(-3-(-3))^2 + (0-3)^2} \\ &= \sqrt{0^2 + (-3)^2} \end{aligned}$$

Donc : PQ = 3.

<u>Exercice</u> 21

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne les points A (3 ; -1) ; B (8 ;2) ; C (-1 ; -5).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$ et $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$.

2) Calcule la distance AB.

<u>Exercice</u> 22

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne les points A (2 ; 0) ; B (-3 ; y) ; C (x ; 3) et D (4 ; 2). (x et y étant des nombres réels).

1) Détermine les nombres x et y pour que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$.
2) Démontre que les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

Exercice 23

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne $\overrightarrow{PQ}\binom{-3}{2}$; $\overrightarrow{RS}\binom{-6}{4}$; $\overrightarrow{TU}\begin{pmatrix}-5\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{WV}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-5\end{pmatrix}$.

1) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et RS sont colinéaires.
2) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{TU}$ et $\overrightarrow{WV}$ sont orthogonaux.

Exercice 24

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne $\overrightarrow{PQ}\binom{x}{2}$; $\overrightarrow{RS}\binom{-3}{4}$.

1) Détermine la valeur de x pour que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ soient colinéaires.
2) Détermine la valeur de x pour que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ soient orthogonaux.

Exercice 25

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne deux points A (*2 ; -3*) ; B ($\frac{3}{2}$; -5) et C ($\frac{7}{4}$; - 4).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) Démontre que les points A ; B et C sont alignés.

Exercice 26

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne deux points A(4 ; 4) ; B(-4; -3) ; C(-2 ; 2) et D(8 ; 1).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Démontre que les droites (BD) et (AC) sont parallèles.

Exercice 27

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne deux points A(3 ; 5) ; B (5; 8) ; C(1 ; 0) et D(4 ; -2).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2) Démontre que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 28

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne les points A(2 ; 0) ; B(-3 ; 5).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$.
2) Calcule les coordonnées du point I, milieu de [AB].
3) Calcule les distances AI et AB.

Exercice 29

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne deux points E(2 ; -3) ; F(0 ; 3) ; G(1 ; 0) et H(x ; -4).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$.
2) Démontre que les points E ; F et G sont alignés.
3) Détermine la valeur de x pour que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ soient orthogonaux.

D-3. Exercices d'approfondissement

Exercice 30

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne les points A (2 ; 0) ; B (6 ; 2) et C(0 ; 4).

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux
3) Calcule les distances AB et AC
4) Détermine la nature du triangle ABC.

Exercice 31

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère les points B (-4 ; 2) et C (2 ; 4). On prend le centimètre comme unité.

1) Place les points B et C dans le repère orthonormé (O, I, J).
2) Exprime les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
3) Détermine les coordonnées du point A pour que le quadrilatère OBAC soit un parallélogramme. Place le point A dans le repère.
4) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
5) Détermine les coordonnées du point R, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
6) Calcule le rayon de ce cercle.