6ème MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Thème : Transformations du plan

LEÇON 11 de la classe de 6ème :

FIGURES SYMETRIQUES PAR RAPPORT A UN POINT

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour les vacances, le conseil régional de Koudoubon a prévu d'organiser les festivités de d'une fête traditionnelle à Mérégou l'un des villages de la région. Ce village est situé le long d'une route rectiligne entre Datan une ville de la région et Koudoubon.
Un élève de 6ème natif de Mérégou donne les indications suivantes à son camarade vivant à Abidjan qu'il a invité avec ses parents pour ces festivités :
« L*a distance entre* Datan ***et*** Koudoubon.***est de 49km ; et ces deux villes sont symétriques par rapport à mon village».***
Sur la carte de Côte d'Ivoire le village n'est malheureusement pas indiqué Alors pour avoir une idée de l'emplacement exact du village son ami veut représenter le village sur la carte par un point, mais il éprouve quelques difficultés. Il décide donc s'informer sur les figures symétriques par rapport à un point pour pouvoir placer le point.

B- RESUME DE COURS

I- Symétrique d'un point par rapport à un point

1. Définition

Définition
Un point **A'** est le symétrique d'un point **A** par rapport à un point **O**, signifie que **O** est le milieu du segment [**AA'**].

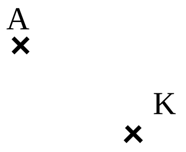
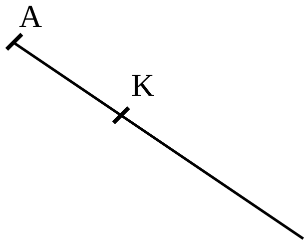
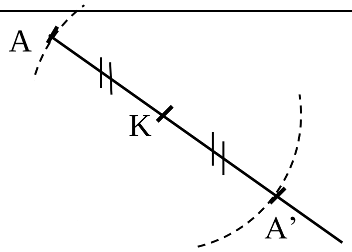
Remarques :
- Le point **O** est son propre symétrique par rapport au point **O**.
- Si **A'** est le symétrique d'un point **A** par rapport à un point **O,** alors **A** est le symétrique du point **A'** par rapport à ce point **O.**

Exercice de fixation
Complete les phrases suivantes par : ***S, milieu, [QQ'], symétriques, P, O, R***
- P est le milieu du segment $[RS]$donc……et ……. sont……………………….par rapport à………
- Q' est le symétrique de Q par rapport à O donc……..est le ………………..du segment…………...

Corrigé de l'exercice de fixation
- P est le milieu du segment $[RS]$donc ***R*** et ***S*** sont ***symétriques*** par rapport à ***P***.
- Q' est le symétrique de Q par rapport à O donc ***O*** est le ***milieu*** du segment ***[QQ']***

2. Construction

Construction du point A’ symétrique de A par rapport au point K.

		
Place les points A et K	Trace la demi-droite [AK)	Place le point A’ sur la demi-droite [AK) tel que AK=KA’.

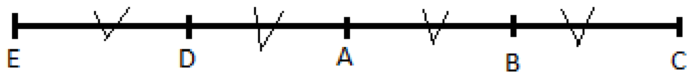
Exercice de fixation

L’unité est le centimètre.

Trace un segment $[AB]$ tel que AB=2.

Place le point C symétrique du point A par rapport au point B.
Place le point D symétrique du point B par rapport au point A.
Place le point E symétrique du point A par rapport au point D.

Corrigé de l’exercice de fixation



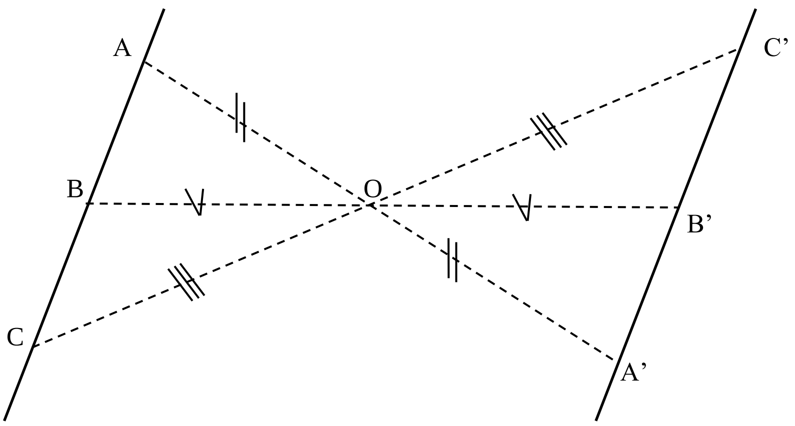
II- Propriétés

1- Symétriques de trois points alignés

Propriété

Si trois points A, B et C sont alignés, alors leurs symétriques A', B' et C' par rapport à un point sont des points alignés.

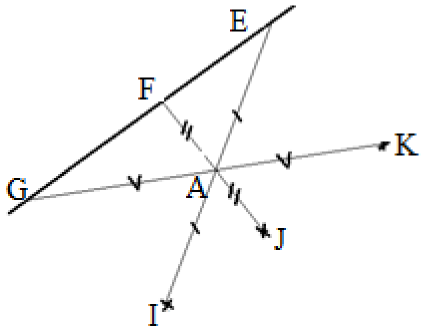
Exemple



Les points A, B et C sont alignés.
Les points A’, B’ et C’ sont les symétriques respectifs des points A, B et C par rapport à O.
Donc les points A’, B’ et C’ sont alignés.

Exercice de fixation

Observe la figure codée ci-contre.
E, F et G sont trois points alignés. I, J et K sont trois points
tels que A soit le milieu des segments $[EI]$ $[FJ]$ et $[GK]$.
Justifie que les points I, J et K sont alignés.



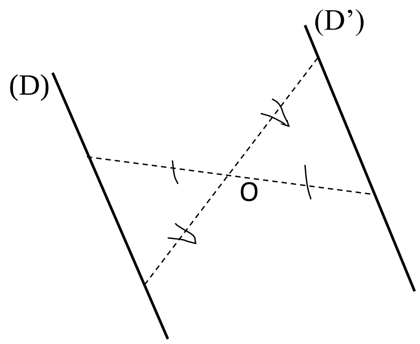
Corrigé de l'exercice de fixation

Les points K, J et I sont les symétriques respectifs des points G, F et E par rapport à A donc les points I, J et K sont alignés.

2- Symétrique d'une droite

Propriété
Le symétrique d'une droite par rapport à un point, est une droite qui lui est parallèle.
Exemple

- Les droites (D) et (D') sont symétriques par rapport au point O.
- Les droites (D) et (D') sont parallèles

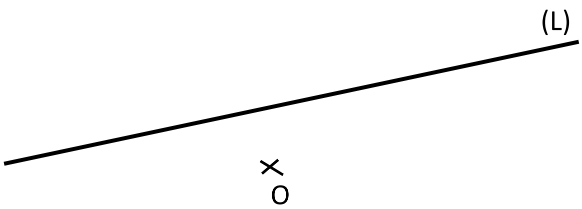


Méthode de construction du symétrique d'une droite
Pour construire le symétrique (D') d'une droite (D) par rapport à un point O, on peut :
Méthode 1
On construit les symétriques A' et B' de deux points A et B de la droite (D) par rapport à O puis on trace la droite (D') passant par A'et B'.

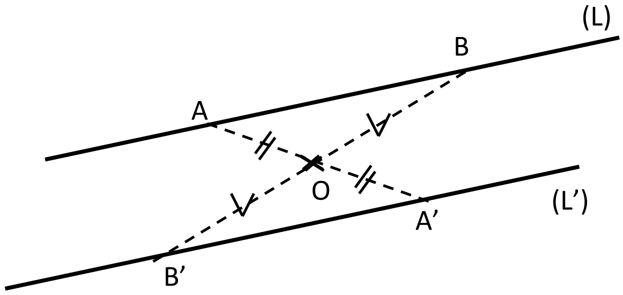
Méthode 2
On construit le symétrique A' d'un point A de la droite (D) par rapport à O puis on trace la parallèle (D') passant par A.

Exercice de fixation

Construis la droite (L'), symétrique de (L) par rapport O.



Corrigé de l'exercice de fixation

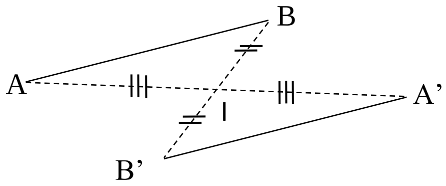


3- Symétrique d'un segment

Propriété

Le symétrique d'un segment par rapport à un point est un segment de même longueur.

Exemple

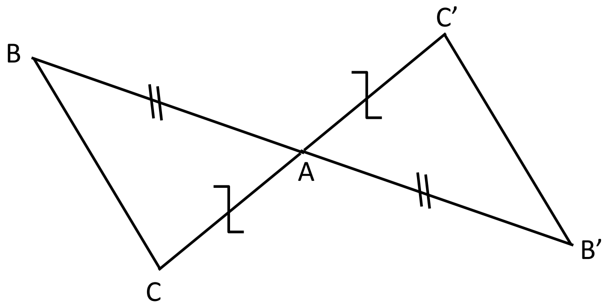


[A'B'] est le symétrique de [AB] par rapport à I, alors AB = A'B'.

Exercice de fixation

- Construis un triangle ABC.
- Place les points B' et C' symétriques respectifs des points B et C par rapport à A.
- Quel est le symétrique de $[BC]$ par rapport à A ?

Corrigé de l'exercice de fixation

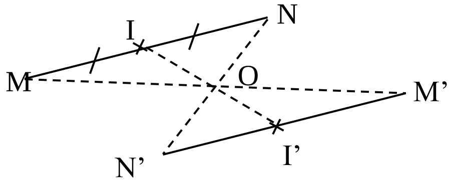


Le symétrique de $[BC]$ par rapport à A est le segment $[B'C']$.

4- Symétrique du milieu d'un segment

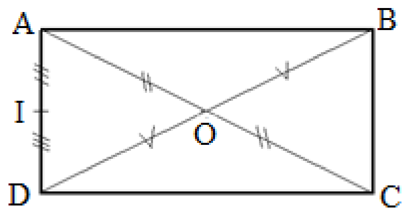
Propriété
Le symétrique du milieu d'un segment par rapport à un point, est le milieu du symétrique de ce segment

Exemple.
I est le milieu du segment [MN]. De plus [MN] et [M'N'] sont symétriques par rapport à un point O. Donc I' est le milieu [M'N'].

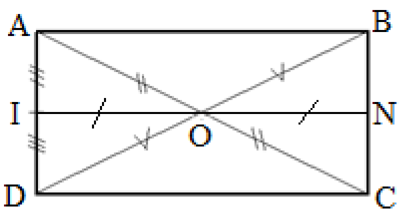


Exercice de fixation

Sur la figure codée ci-contre, ABCD est un rectangle de centre O et I est le milieu du segment [AD].
- Construis le point N symétrique de I par rapport au point O.
- Nomme le symétrique du segment [AD] par rapport au point O.
- Nomme le milieu du segment [BC] en justifiant ta réponse.



Corrigé de l'exercice de fixation

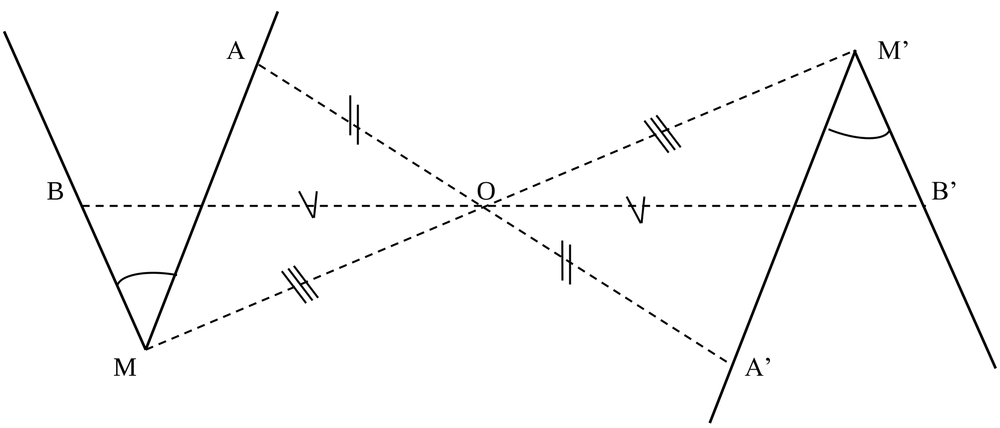


- Je trace la droite (OI), elle coupe la droite (BC) en N.
- Le segment [BC] est le symétrique du segment [AD] par rapport à O.
- N est le milieu de [BC] car I est le milieu du segment [AD] donc son symétrique par rapport au point O est le milieu du segment [BC]

5- Symétrique d'un angle

Propriété
Le symétrique d'un angle par rapport à un point est un angle de même mesure.

Exemple



Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{A'M'B'}$ sont symétriques par rapport au point O, donc mes$\widehat{AMB}$ = mes$\widehat{A'M'B'}$.

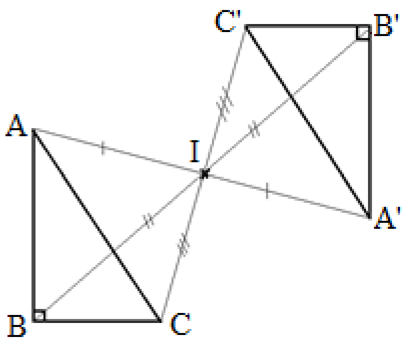
<u>Exercice de fixation</u>

Trace un triangle ABC rectangle en B et marque un point I extérieur à ce triangle.

1) Construis le symétrique A'B 'C'du triangle ABC par rapport à I.
2) Donne la mesure de l'angle $\widehat{A'B'C'}$, et justifie ta réponse

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

1)



2) $mes\widehat{A'B'C'} = 90°$

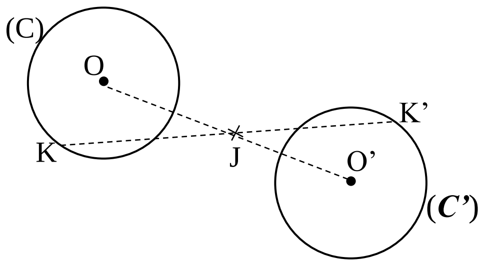
Deux angles symétriques par rapport à un point ont la même mesure ; or les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'B'C'}$ sont symétriques par rapport au point I donc ils ont la même mesure : $mes\widehat{A'B'C'} = mes\widehat{ABC} = 90°$

6- <u>Symétrique d'un cercle</u>

<u>Propriété</u>

Le symétrique d'un cercle par rapport à un point est un cercle de même rayon.

<u>Exemple</u>



(*C*) est un cercle de centre O et de rayon OK.

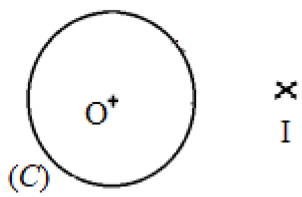
Le cercle (*C'*) de centre O' et de rayon O'K' est le symétrique du cercle (*C*) par rapport à J et OK = O'K'

<u>Méthode de construction du symétrique d'un cercle</u>

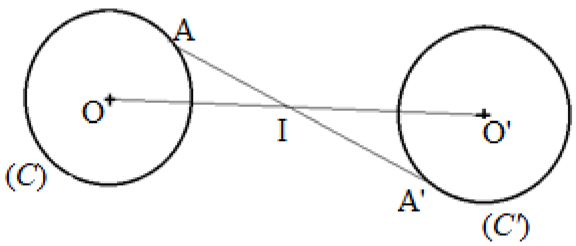
Pour construire le symétrique d'un cercle (*C*) de centre I par rapport à un point O, il suffit de construire le symétrique I' de I et le symétrique A' d'un point A de (***C***) puis de construire le cercle de centre I' passant par A'

<u>Exercice de fixation</u>

(***C***) est un cercle de centre O et de rayon 1,5cm.
I est un point distinct de O.
Construis le symétrique (***C'***) du cercle (***C***) par rapport à I.



Corrigé de l'exercice de fixation

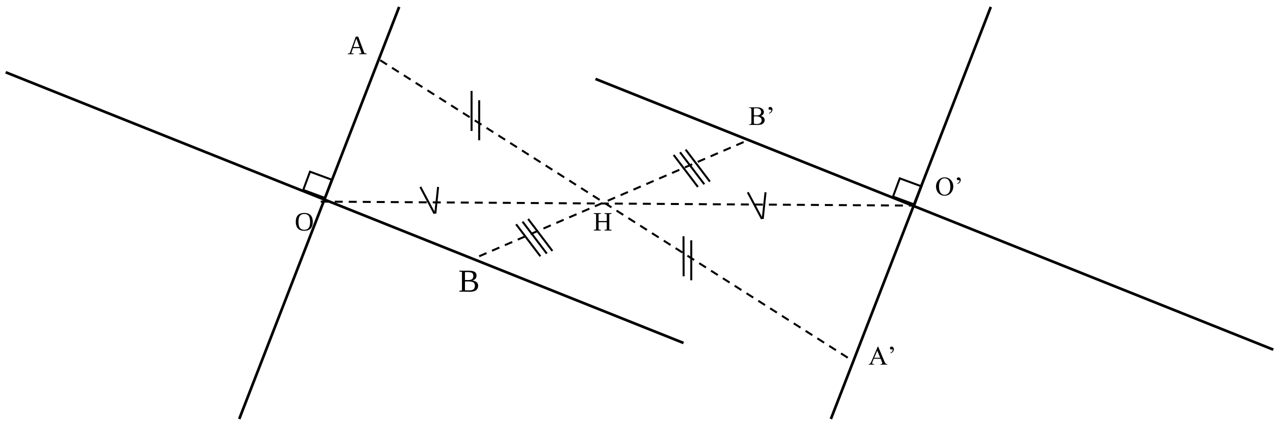


7- Symétriques de deux droites perpendiculaires

Propriété

Les symétriques de deux droites perpendiculaires par rapport à un point sont deux droites perpendiculaires.

Exemple

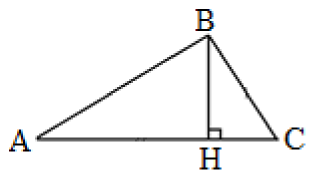


Les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires. Les droites (O'A') et (O'B') sont les symétriques respectifs des droites (OA) et (OB) par rapport au point H. Donc les droites (O'A') et (O'B') sont perpendiculaires.

Exercice de fixation

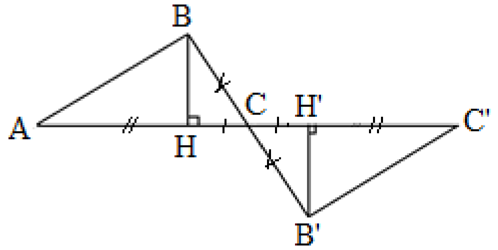
ABC est un triangle de hauteur (BH).

1) Construis A', B' et H' les symétriques respectifs des points A, B et H par rapport à C.
2) Justifie que (B'H') et (A'C) sont perpendiculaires.



Corrigé de l'exercice de fixation

1)



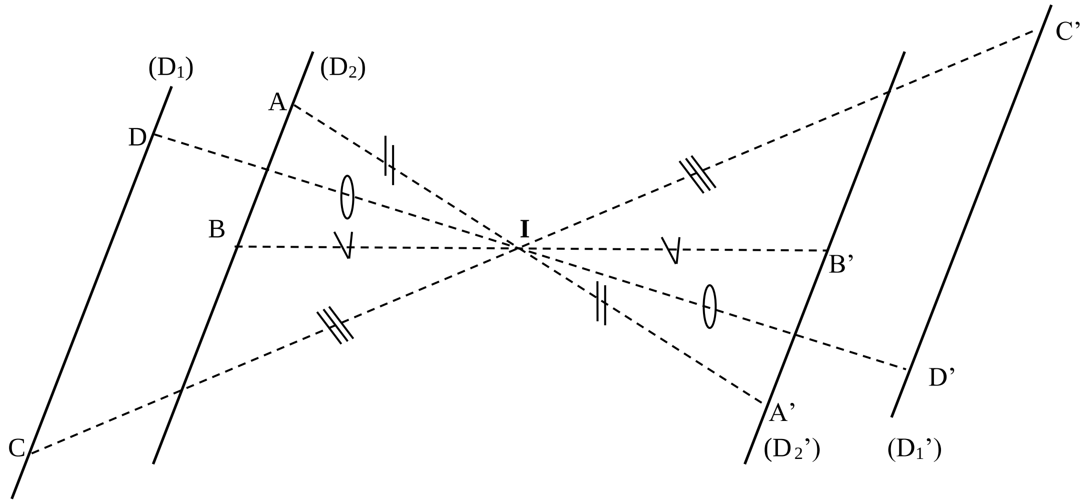
2)
Les droites (AC) et (BH) sont perpendiculaires.
(A'C) et (B'H') sont les symétriques respectifs les droites (AC) et (BH) par rapport à C donc (A'C) et (B'H') sont perpendiculaires.

8- Symétriques de deux droites parallèles

Propriété

Les symétriques de deux droites parallèles par rapport à un point sont deux droites parallèles.

Exemple



Les droites ($D1$) et (D2) sont parallèles. Les droites (D3) et (D4) sont les symétriques respectifs des droites (D1) et (D2) par rapport au point **I**. Donc les droites (D3) et (D4) sont aussi parallèles.

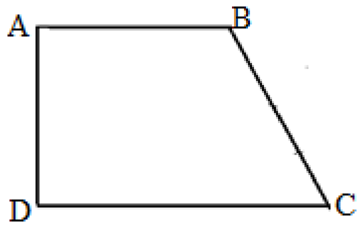
Exercice de fixation

.

ABCD est un quadrilatère tel que (AB) // (CD).

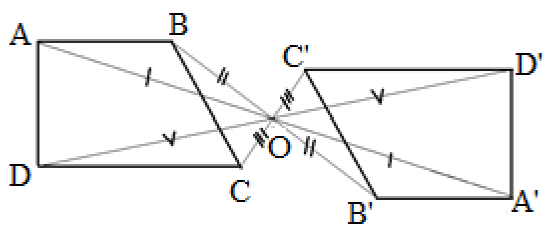
Le point O est à l'extérieur du quadrilatère ABCD ;

1) Construis les points A', B', C' et D' les symétriques respectifs des points A, B, C et D par rapport à O.
2) Justifie que les droites (A'B') et (C'D') sont parallèles



Corrigé de l'exercice de fixation

1)



2)

- (AB) // (CD)
- (AB) et (A'B') sont symétriques par rapport à O, (CD) et (C'D') sont symétriques par rapport à O

donc les droites (A'B') et (C'D') sont parallèles

III- Centre de symétrie d'une figure

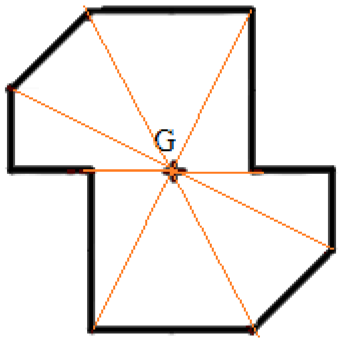
1. Définition

Définition :

Un point est centre de symétrie d'une figure lorsque cette figure est son propre symétrique par rapport à ce point.

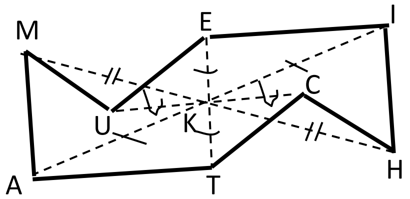
Exemple

Le point G est le centre de symétrie de la figure ci-dessous



Exercice de fixation

Justifie que le point K est le centre de symétrie du polygone MATHIEU ci-dessous,



Corrigé de l'exercice de fixation

On remarque que le symétrique de chaque côté du polygone MATHIEU par rapport au point K est un côté du polygone MATHIEU ; donc le polygone MATHIEU est son propre symétrique par rapport à K. K est par conséquent le centre de symétrie du polygone MATHIEU.

2. Centre de symétrie de figures particulières

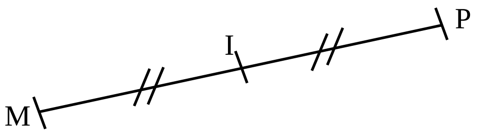
- **Segment**

Propriété

Le centre de symétrie d'un segment est le milieu de ce segment.

Exemple

Le point I est le centre de symétrie du segment [MP].



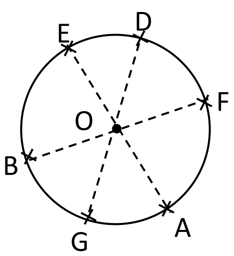
- **Cercle**

Propriété

Le centre de symétrie d'un cercle est le centre de ce cercle

Exemple

Le point O est le centre de symétrie de ce cercle

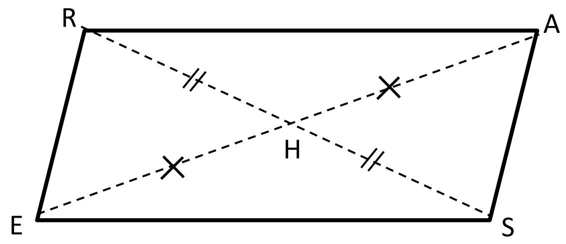


- **Parallélogramme**

Propriété

Le centre de symétrie d'un parallélogramme est le centre de ce parallélogramme.

Exemple



Le point H est le centre de symétrie du parallélogramme RASE

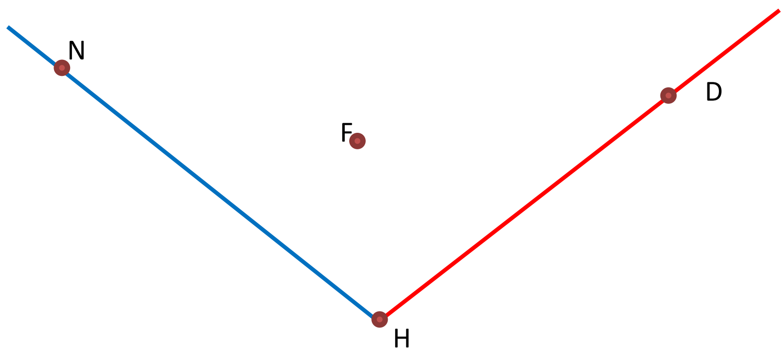
C- SITUATIION D'EVALUATION.

Deux voies rectilignes partent de l'hôtel Hambol (H) de Katiola, l'une vers Niakaramadougou (N) et l'autre vers Dabakala (D).

Pour faciliter l'évacuation de la production d'anacarde de Foronan(F) le conseil régional désire construire deux gares G et G' sur chacune des deux voies de façon que Foronan soit à égale distance des deux gares.

Le technicien chargé des travaux sollicite ton professeur de Mathématique, qui à son tour vous associe à ce projet afin de déterminer l'emplacement des deux gares.

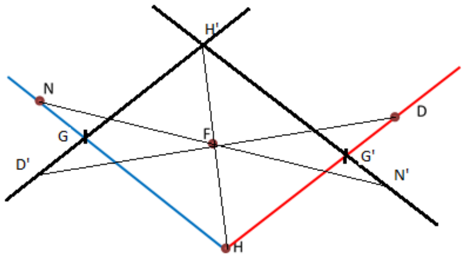
La figure ci-dessous présente la situation.



1. Construis le symétrique (H'N') de la droite (HN) par rapport à F.
2. Construis le symétrique (H'D') de la droite (HD) par rapport à F.
3. Soit G l'intersection des droites (H'D') et (HN) et G' l'intersection des droites (H'N') et (HD).
   a) Justifie que les droites (GH) et (G'H') sont parallèles, de même que les droites (GH') et (G'H)
   b) Justifie que le quadrilatère GH'G'H est un parallélogramme de centre F.
   c) Justifie que les points G et G' répondent à la préoccupation du conseil général.

Corrigé de l'exercice de la situation d'évaluation

1) et 2)



3) a)

- les droites (GH) et (G'H') sont parallèles parce qu'elles sont symétriques par rapport à F.
- les droites (GH') et (G'H) sont parallèles parce qu'elles sont confondues respectivement aux droites (H'D') et (HD) qui sont parallèles.

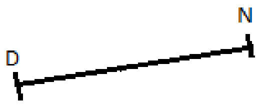
b) le quadrilatère GH'G'H a ses côtés deux à deux parallèles donc c'est un parallélogramme. Les points H et H'sont symétriques par rapport à F donc F est le milieu du segment [HH'] d'où F est le centre du parallélogramme GH'G'H.

c) F est le centre du parallélogramme GH'G'H donc F est le milieu du segment [GG'] ;
F est à égale distance de G et G' donc les points G et G' répondent bien à la préoccupation du conseil général.

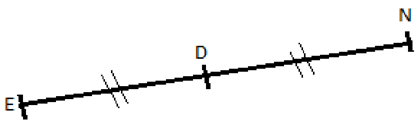
D- EXERCICES

Exercice 1

On donne D et N deux points tels que DN = 4cm
Construis le symétrique E du point N par rapport à D

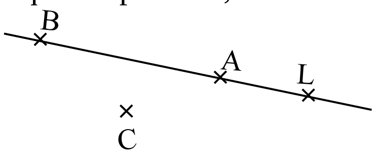


Corrigé de l'exercice 1



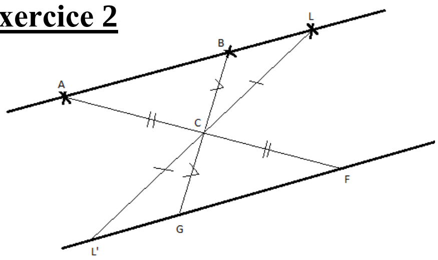
Exercice 2

Les points A, B et L sont alignés.
1- Construis les symétriques F, G et L' des points respectifs A, B et L par rapport à C.
2-Justifie que les points F, G et L' sont alignés



Corrigé de l'exercice 2

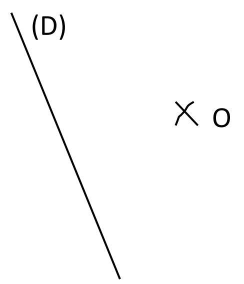
1-



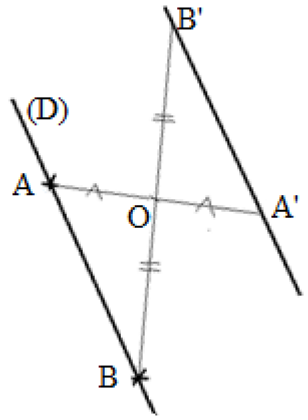
2- Les points A, B et L sont alignés.
   F, G et L’ sont les symétriques respectifs de A, B et L’ par rapport à C ; donc A, B et L’ sont aussi alignés.

Exercice3

Sur la figure ci-dessous construis le symétrique (D’) de la droite (D) par rapport au point O



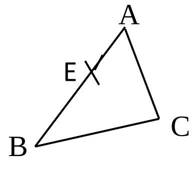
Corrigé de l’exercice 3



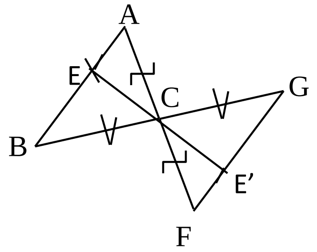
Exercice 4

ABC est un triangle et E un point de [AB].

1) Construis le symétrique [FG] du segment [AB] par rapport à C.
2) Construis le symétrique E’ de E par rapport à C.

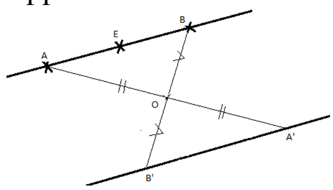


Corrigé de l’exercice 4



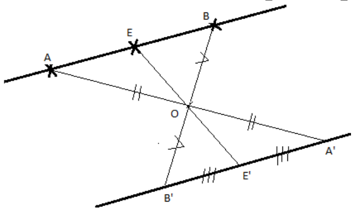
Exercice 5

Sur la figure ci-dessous, les segments [AB] et [A’B’] sont symétriques par rapport à O.
E est le milieu de [AB]. On appelle E’ le symétrique de E par rapport à O
1- Justifie que E’ est le milieu du segment [A’B’]
2- Construis le point E’ avec la règle uniquement.



Corrigé de l’exercice 5

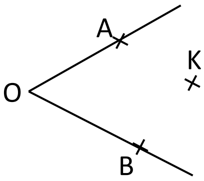
1- Les segments [AB] et [A’B’] sont symétriques par rapport à O. E est le milieu du segment [AB], son symétrique par rapport au point O est le milieu du segment [A’B’] or E’ est ce symétrique donc E’ est le milieu de [A’B’].
2-



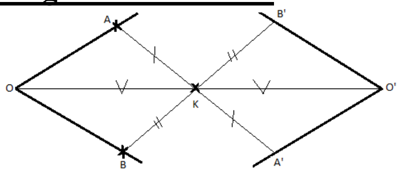
On trace la droite (EO) qui coupe le segment [A’B’] en E’

Exercice 6

Construis le symétrique de l’angle $\widehat{AOB}$par rapport au point K.



Corrigé de l’exercice 6

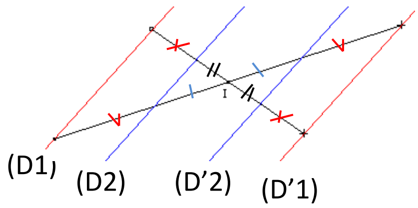


Le symétrique de l’angle $\widehat{AOB}$ est l’angle $\widehat{A'O'B'}$

Exercice 7

1) Observe la figure ci-dessous et complète le tableau suivant

	(D1)	
a pour symétrique par rapport à I		(D2’)



2) Justifie que (D’1) et (D’2) sont parallèles

Corrigé de l’exercice 7

1)

	(D1)	(D2)
a pour symétrique par rapport à I	(D’1)	(D’2)

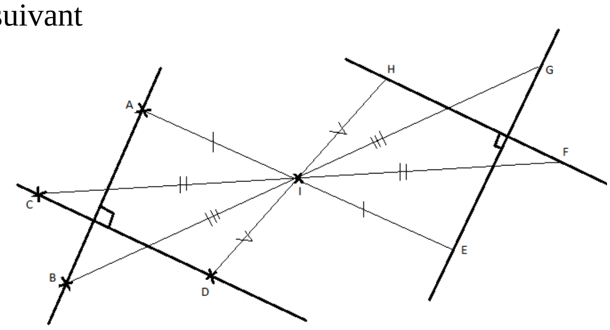
2) Justifions que (D’1) et (D’2) sont parallèles
- (D1) et (D2) sont parallèles.

- (D’1) et (D’2) sont les symétriques respectifs de (D1) et (D2) par rapport I. Donc (D’1) et (D’2) sont parallèles

Exercice 8

1) Observe la figure ci-dessous et complète le tableau suivant

	(AB)	(CD)
a pour symétrique par rapport à I		



2) Justifie que (EG) est perpendiculaire à (FH)

Corrigé de l’exercice 8

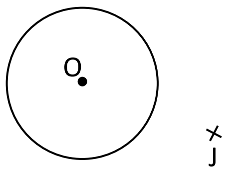
1)

	(AB)	(CD)
a pour symétrique par rapport à I	(EG)	(FH)

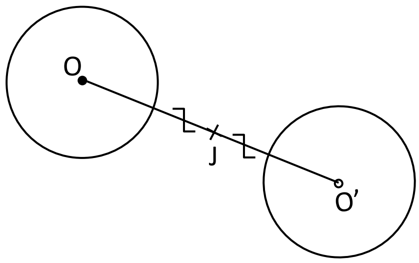
2) Justifions que (EG) est perpendiculaire à (FH)
   - (AB) et (CD) sont perpendiculaires
   - (EG) et (FH) sont les symétriques respectifs de (AB) et (CD) par rapport I. Donc (EG) et (FH) sont perpendiculaires.

Exercice 9

Construis le symétrique du cercle (C) par rapport au point J



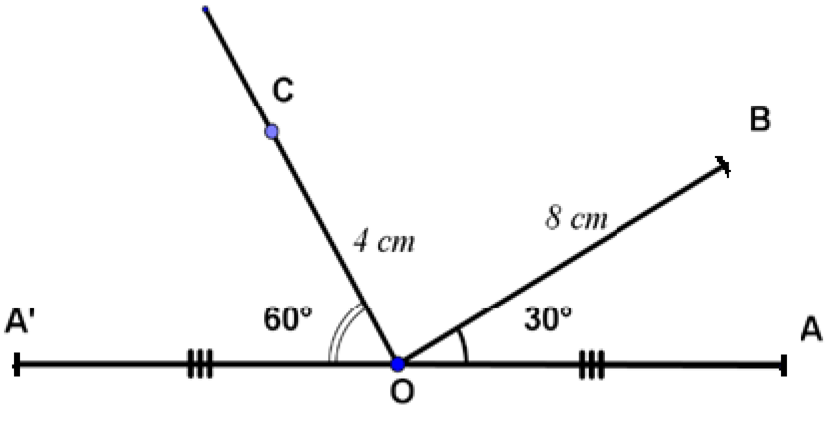
Corrigé de l’exercice 9



EXERCICE 10

Reproduis la figure ci-dessus sur ta feuille.

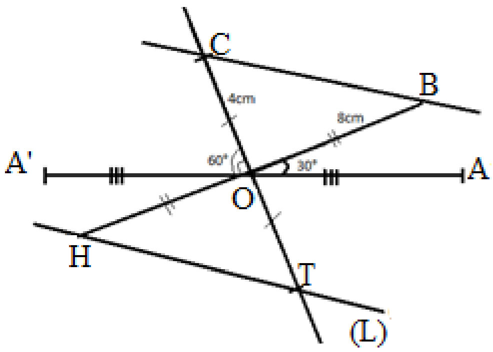
a) Construis le point H, symétrique de B par rapport à O.
b) Construis le point T, symétrique de C par rapport à O.
c) Détermine, en justifiant tes réponses, la mesure des angles $\widehat{TOA}$ et $\widehat{HOA'}$
d) Trace la droite (L) parallèle à la droite (CB) passant par T.



Corrigé de l'exercice 10

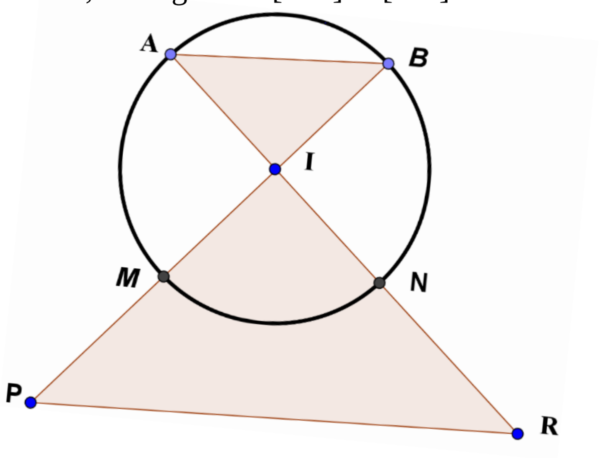
a) Voir figure
b) Voir figure
c) Les angles $\widehat{TOA}$ et $\widehat{COA'}$ sont symétriques par rapport à O donc mes$\widehat{TOA}$ = mes$\widehat{COA'}$ $= 60°$.
Les angles $\widehat{HOA'}$ et $\widehat{BOA}$ sont symetriques par rapport à O donc mes$\widehat{HOA'}$ = mes$\widehat{BOA}$ $= 30°$.

d) Il suffit de tracer la droite (HT) : c'est la droite symétrique de la droite (BC) par rapport à O.
Voir figure



EXERCICE 11

Dans la figure ci-dessous, les segments [MB] et [AN] sont deux diamètres du cercle de centre I.
PM = MI = RN.



Reproduis puis complète le tableau suivant :

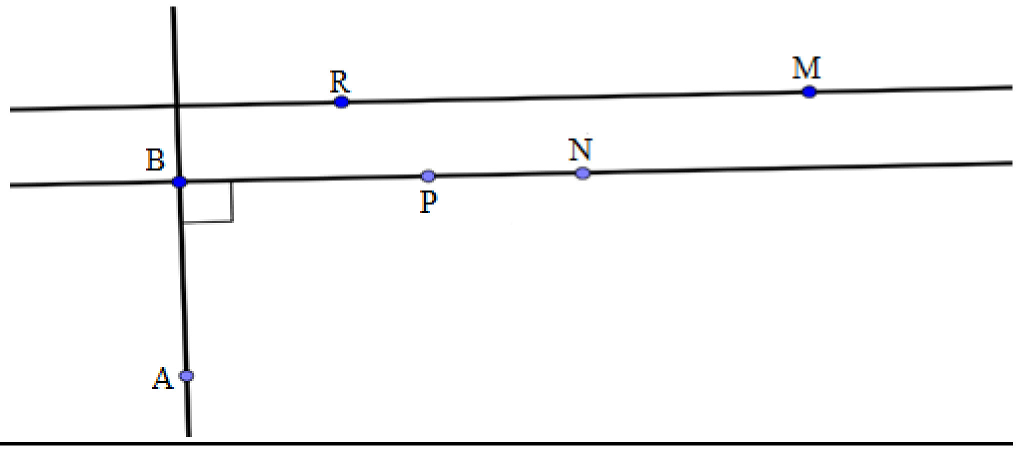
Le symétrique	du point P	du point B	du point I	du point R	de la droite (AB).	du segment [MN]
par rapport au point	M	I	M	N	I	I
est						

Corrigé de l'exercice 11

Complétons le tableau suivant :

Le symétrique	du point P	du point B	du point I	du point R	de la droite (AB).	du segment [MN]
par rapport au point	M	I	M	N	I	I
est	I	M	P	I	(MN)	[AB]

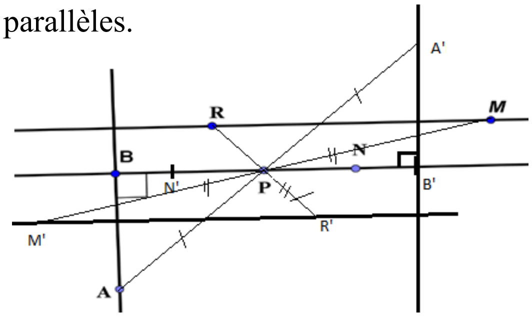
EXERCICE 12



a) Reproduis la figure ci-dessus ;
b) Construis les droites (A'B'), (B'N') et (R'M') symétriques respectifs des droites (AB), (BN) et (RM) par rapport au point P.
c) Justifie que les droites (A'B') et (B'N') sont perpendiculaires.
d) On considère que les droites (BN) et (RM) sont parallèles.
Justifie que les droites (B'N') et (R'M') sont aussi parallèles.

Corrigé de l'exercice 12

a) Voir figure
b) Voir figure
c) Justifions que les droites (A'B') et (B'N') sont perpendiculaires.
- (AB) et (BN) sont perpendiculaires
- (A'B') et (B'N') sont les symétriques respectifs de (AB) et (BN) par rapport P. Donc (A'B') et (B'N') sont perpendiculaires.
d) On considère que les droites (BN) et (RM) sont parallèles.
Justifions que les droites (B'N') et (R'M') sont aussi parallèles.
- (BN) et (RM) sont parallèles.
- (B'N') et (R'M') sont les symétriques respectifs de (BN) et (RM) par rapport P. Donc (B'N') et (R'M') sont parallèles.



E- DOCUMENTS

-CIAM 6ème

-Théorème Mathématiques 6ème

-6èmeMathématiques ; ECOLE, NATION ET DEVELOPPEMENT.

-collection élites Mathématiques 6ème