5ème

Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : GEOMETRIE DU PLAN

LEÇON 7 DE LA CLASSE DE CINQUIEME : TRIANGLES

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

La promotion 5ème d'un collège dispose d'une parcelle de forme triangulaire dont les côtés ont la même longueur pour sa coopérative. Les six classes doivent avoir chacune la même superficie. Pour le partage, leur professeur de mathématiques affirme qu'il leur suffirait de tracer la médiatrice de chaque côté.

Les élèves de la 5ème 2 cherchent à s'informer sur les droites particulières d'un triangle et les construire.

B. CONTENU DE LA LEÇON

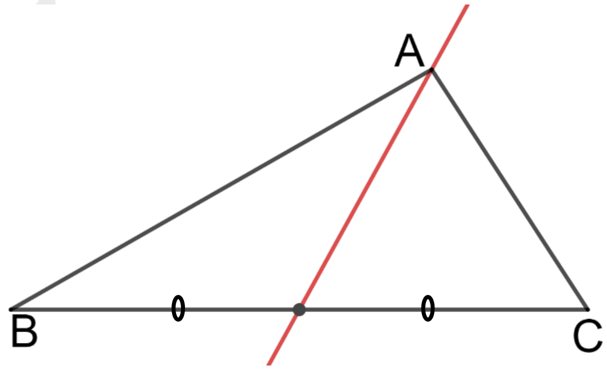
I. Droites particulières d'un triangle

1. Médiane d'un triangle

Définition

On appelle médiane d'un triangle une droite qui passe par un sommet de ce triangle et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

La médiane issue de A d'un triangle ABC est la droite qui passe par A et par le milieu de [BC].

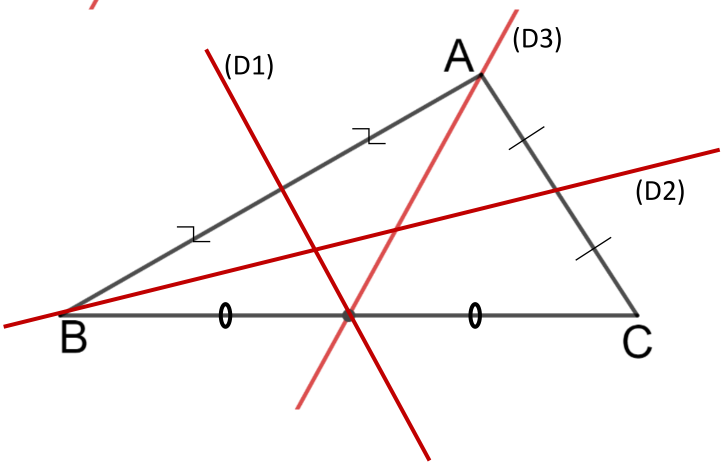


Remarque

Un triangle possède trois médianes.

Exercice de fixation

Identifie des médianes du triangle ABC sur la figure ci-contre.



Corrigé de l'exercice de fixation

Les médianes sont (D2) et (D3).

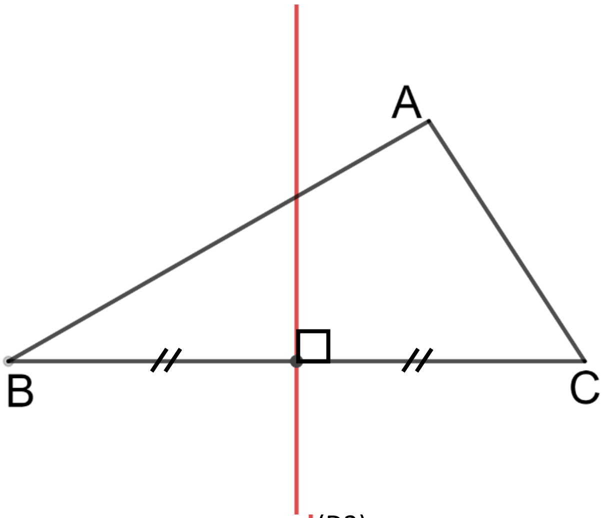
Propriété du MENETFP

2. Médiatrice d'un triangle

Définition

On appelle médiatrice d'un triangle la médiatrice d'un des côtés de ce triangle.

La médiatrice du côté [BC] est la droite qui passe par le milieu de [BC] et qui est perpendiculaire à (BC).



Remarque

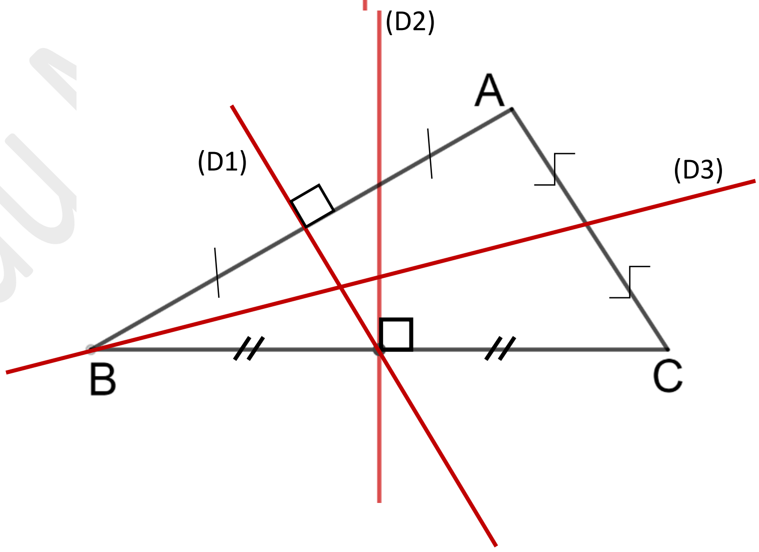
Un triangle possède trois médiatrices.

Exercice de fixation

Identifie des médiatrices du triangle ABC sur la figure ci-contre.

Corrigé de l'exercice de fixation

Les droites (D1) et (D2).

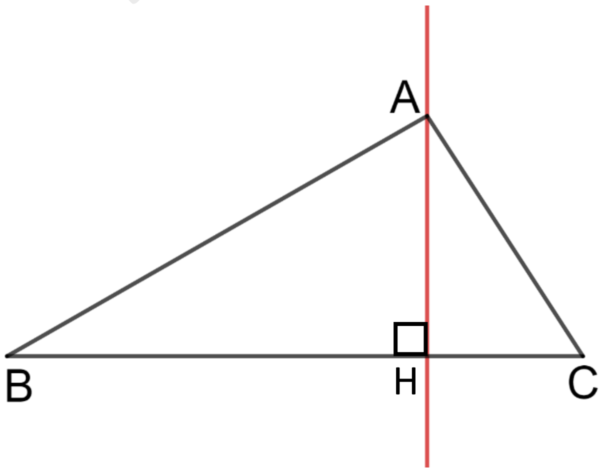


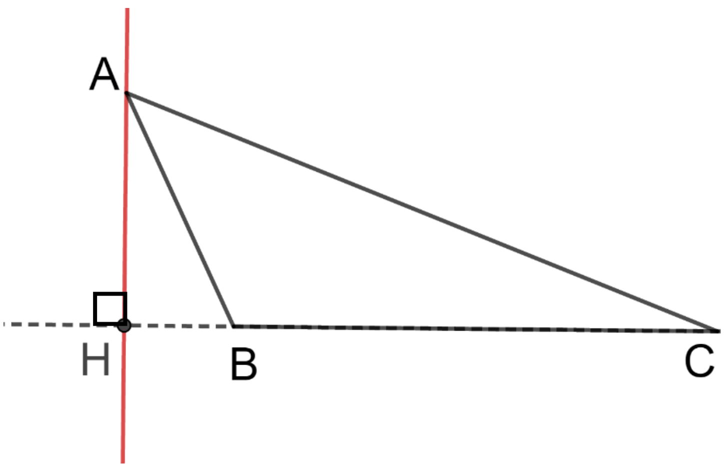
3. Hauteur d'un triangle

Définition

Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet de ce triangle et est perpendiculaire au support du côté opposé à ce sommet.

La hauteur issue de A d'un triangle ABC est la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à (BC).





Propriété du

Remarque

Un triangle possède trois hauteurs.

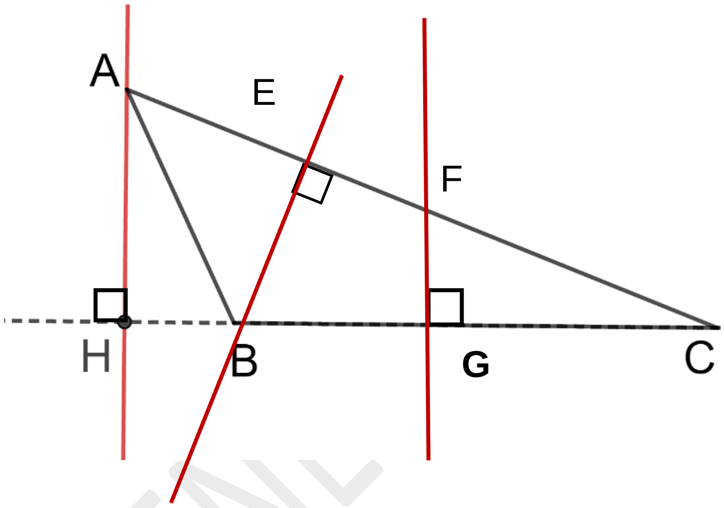
Selon les cas, la hauteur désigne la droite (AH), le segment [AH] ou la longueur AH.

Exercice de fixation

Identifie des hauteurs du triangle ABC sur la figure ci-contre.

Corrigé de l'exercice fixation

Les droites (AH) et (BE).

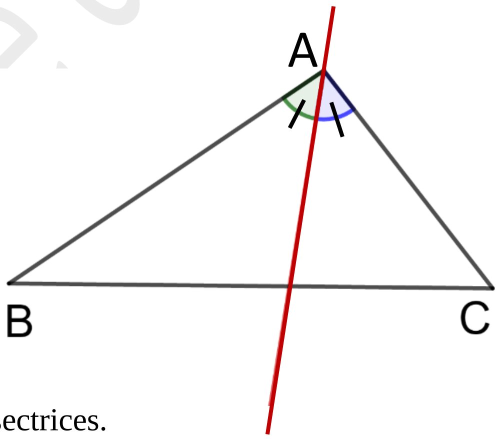


4. Bissectrice d'un triangle

Définition

On appelle bissectrice d'un triangle, la bissectrice d'un des angles de ce triangle.

La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ d'un triangle ABC est la droite qui passe par le sommet A et qui partage l'angle $\widehat{BAC}$ en deux angles de même mesure.



Remarque

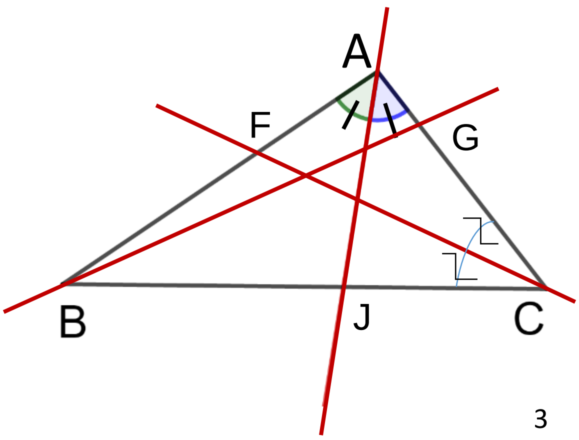
Un triangle possède trois bissectrices.

Exercice de fixation

Identifie des bissectrices du triangle ABC sur la figure ci-contre.

Corrigé de l'exercice de fixation

Les droites (AJ) et (CF).



Propriété du MENE

II. Somme des mesures des angles d'un triangle

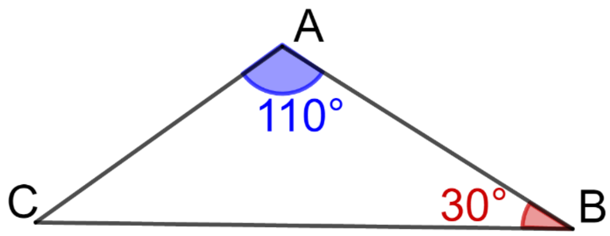
Propriété

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.

Exercice de fixation

Observe attentivement la figure ci-contre, puis

Détermine par calcul la mesure de l'angle $\widehat{C}$.



Corrigé de l'exercice de fixation

Dans le triangle ABC,

On a : $mes\ \widehat{A} + mes\ \widehat{B} + mes\ \widehat{C} = 180°$

C'est-à-dire $110° + 30° + mes\ \widehat{C} = 180°$

Soit $140° + mes\ \widehat{C} = 180°$

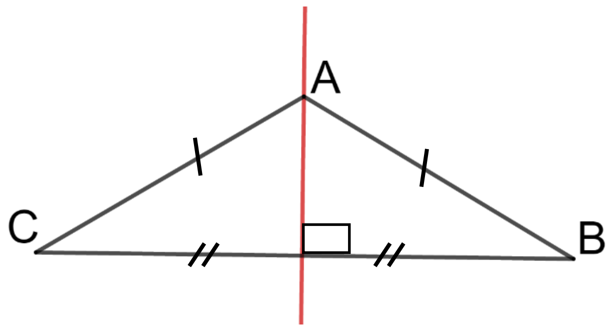
Donc $mes\ \widehat{C} = 180° - 140° = 40°$

III. Triangles particuliers

I. Triangle isocèle

Propriété 1

Un triangle isocèle possède un axe de symétrie.



Remarque

Cet axe de symétrie est à la fois la hauteur issue de son sommet principal, la médiane issue de son sommet principal, la bissectrice de l'angle de son sommet principal et la médiatrice de sa base.

Exercice de fixation

Identifie l'axe de symétrie du triangle EFG dans chacun des cas suivants :

a) EFG est un triangle isocèle en F
b) EFG est un triangle isocèle en E

Propriété du MENE

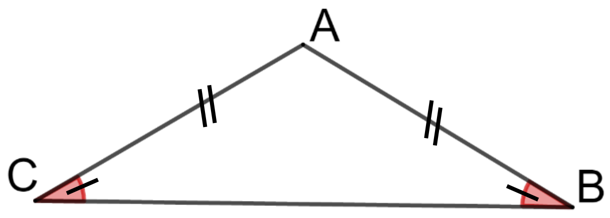
Corrigé de l’exercice de fixation

a) **La hauteur issue du sommet F** ou **la médiane issue de F** ou **la bissectrice de l’angle $\widehat{F}$** ou **la médiatrice du segment [EG]**.

b) **La hauteur issue du sommet E** ou **la médiane issue de E** ou **la bissectrice de l’angle $\widehat{E}$** ou **la médiatrice du segment [FG]**.

Propriété 2

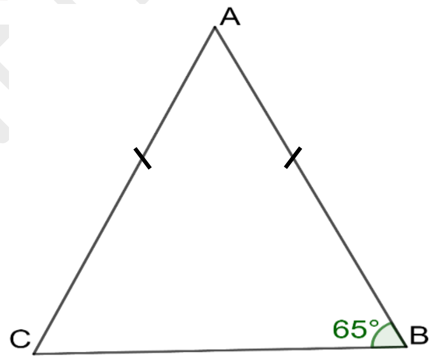
Dans un triangle isocèle, les angles à la base ont la même mesure.



Exercice de fixation

ABC est un triangle isocèle en A, $mes\ \widehat{B} = 65°$.

Détermine $mes\ \widehat{C}$.



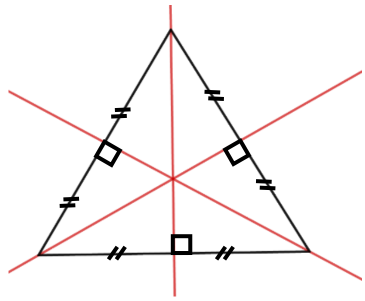
Corrigé de l’exercice de fixation

$mes\ \widehat{C} = mes\ \widehat{B} = 65°$.Car $\widehat{C}$ et $\widehat{B}$ sont les angles à la base du triangle ABC isocèle en A.

II. Triangle équilatéral

Propriété 1

Un triangle équilatéral possède trois axes de symétrie.



Remarque

Ces axes de symétrie sont à la fois les trois hauteurs, les trois médianes, les trois médiatrices et les trois bissectrices du triangle.

Exercice de fixation

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

a) Le triangle équilatéral n’a pas d’axe de symétrie

b) Le triangle équilatéral a un seul axe de symétrie

c) Le triangle équilatéral a trois axes de symétrie

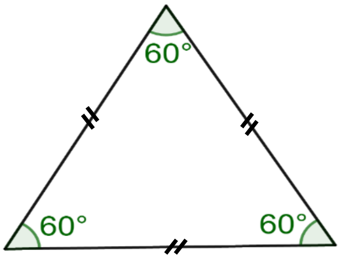
Corrigé de l’exercice de fixation

a) Faux ; b) Faux ; c) Vrai.

Propriété 2

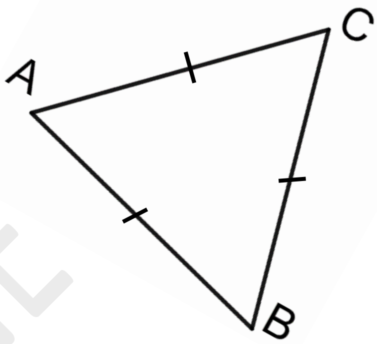
Propriété du MENA-FP

Dans un triangle équilatéral, les trois angles ont la même mesure. Cette mesure est de 60°.



Exercice de fixation

ABC est un triangle équilatéral. Cite les angles de même mesure.



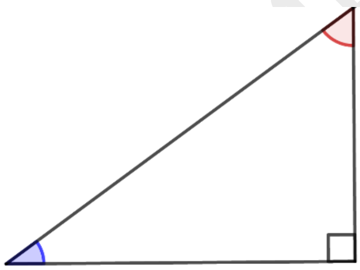
Corrigé de l'exercice de fixation

Les angles de même mesure sont $\widehat{A}$; $\widehat{B}$ *et* $\widehat{C}$.

III. Triangle rectangle

Propriété

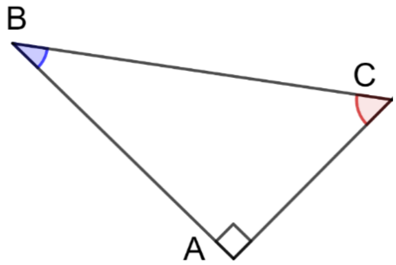
Un triangle rectangle possède deux angles complémentaires.



Exemple

ABC est un triangle rectangle en A,

Donc $mes\ \widehat{B} + mes\ \widehat{C} = 90°$



Exercice de fixation

EFG est un triangle rectangle en E. Complète le tableau ci-dessous :

$mes\ \widehat{F}$	30°		48°	60°	
$mes\ \widehat{G}$		45°			23°

Corrigé de l'exercice de fixation

$mes\ \widehat{F}$	30°	***45°***	48°	60°	***67°***
$mes\ \widehat{G}$	***60°***	45°	***42°***	***30°***	23°

IV. Reconnaitre un triangle particulier

1. Triangle isocèle

Propriétés

- Si un triangle possède un axe de symétrie, alors c'est un triangle isocèle.

- Si un triangle possède deux angles de même mesure, alors c'est un triangle isocèle.

2. Triangle équilatéral

Propriétés

- Si un triangle possède trois axes de symétrie, alors c'est un triangle équilatéral.
- Si un triangle possède trois angles de même mesure, alors c'est un triangle équilatéral.
- Si un triangle isocèle possède un angle de 60°, alors c'est un triangle équilatéral.

3. Triangle rectangle

Propriété

- Si un triangle possède deux angles complémentaires, alors c'est un triangle rectangle.

Exercice de fixation

Relie chaque description du tableau de gauche à son correspondant dans le tableau de droite :

Le triangle possède un axe de symétrie
Le triangle possède deux angles de même mesure
Le triangle possède trois axes de symétries
Le triangle possède deux angles complémentaires
Le triangle isocèle possède un angle de 60
Le triangle possède trois angles de même mesure

c'est un triangle rectangle
c'est un triangle équilatéral
c'est un triangle isocèle

Corrigé de l'exercice de

Le triangle possède un axe de symétrie
Le triangle isocèle possède un angle de 60
Le triangle possède trois axes de symétries
Le triangle possède deux angles complémentaires
Le triangle possède deux angles de même mesure
Le triangle possède trois angles de même mesure

c'est un triangle rectangle
c'est un triangle équilatéral
c'est un triangle isocèle

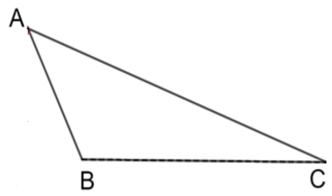
Propriété du MENETFP

V. INEGALITES TRIANGULAIRES

Propriété

Dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Exemple



Pour le triangle ABC ci-contre, on a donc :

AB < AC+BC

AC < AB+BC

BC < AB+AC

Remarque

Dans le cas où cette propriété n'est pas respectée, l'on ne peut construire le triangle.

Exercice de fixation

a) RST est un triangle. Ecris toutes les inégalités triangulaires que l'on a.

b) Parmi les trois propositions ci-dessous une seule des permet d'avoir un triangle PQR, indique-la.

Proposition 1 : PR = 3,9 cm ; PQ = 1,2 cm ; RQ = 2,7 cm.

Proposition 2 : PR = 7 cm ; PQ = 4 cm ; RQ = 5 cm.

Proposition 3 : PR = 3 cm ; PQ = 9 cm ; RQ = 5 cm.

Corrigé de l'exercice de fixation

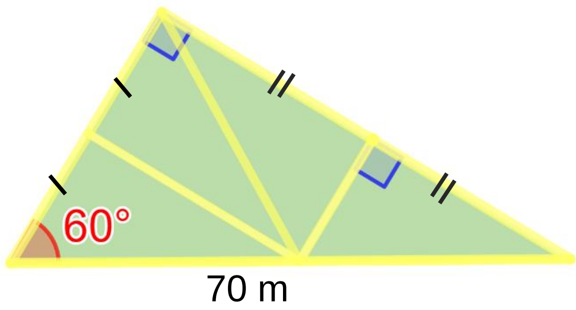
a) RT < RS + ST ; RS < RT + TS ; TS < TR + RS

b) Proposition 2 : car 5<7+4 ; 4<7+5 ;7<4+5

C. SITUATION D'ÉVALUATION

Le conseil scolaire de l'environnement d'un collège est chargé de créer un jardin botanique. Au cours d'une réunion, il a été retenu d'aménager le jardin dans un coin de la cour de l'établissement, avec six allées droites le bordant et le partageant suivant la figure codée ci-dessous. Yao un élève de 5ème affirme que cette figure possède des droites particulières de triangle et des propriétés vues en classe sur les triangles.

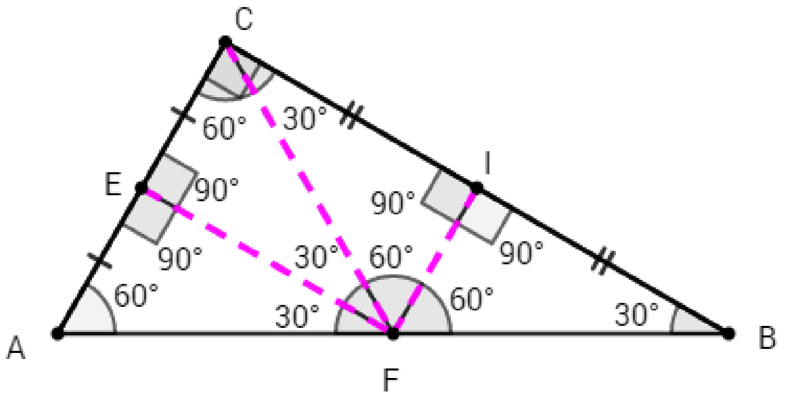
Afin de faciliter les travaux, le professeur d'EPS demande à ses camarades de classe de produire un plan du jardin.



1. Construis un plan de ce jardin. (Tu prendras 1 cm pour 10 m).
2. Complète ce plan avec les mesures de chacun des angles de la figure. Justifie tes réponses.

<u>Corrigé de la situation d'évaluation</u>

1.



2.

- $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAC}$ sont les angles complémentaires du triangle ABC rectangle en C donc
  $mes\ \widehat{BAC} = 90° - mes\ \widehat{BAC} = 90° - 60°$
  $\boldsymbol{mes\ \widehat{BAC} = 30°}$

- De la même manière dans le triangle BIF rectangle en I,
  $mes\ \widehat{IFB} = 90° - mes\ \widehat{FBI} = 90° - 30°$
  $\boldsymbol{mes\ \widehat{IFB} = 60°}$

- (IF) est la médiatrice de $[BC]$ donc FB=FC.
  FB=FC donc le triangle FBC est isocèle en F d'où $mes\ \widehat{FCB} = mes\ \widehat{FBC} = 30°$
  $\boldsymbol{mes\ \widehat{FCB} = 30°}$

- $mes\ \widehat{ACF} + mes\ \widehat{FCB} = mes\ \widehat{ACB}$
  $mes\ \widehat{ACF} + mes\ \widehat{FCB} = 90°$
  $mes\ \widehat{ACF} = 90° - mes\ \widehat{FCB} = 90° - 30°$
  $\boldsymbol{mes\ \widehat{ACF} = 60°}$

- Dans le triangle AFC, $mes\ \widehat{FCA} + mes\ \widehat{FAC} + mes\ \widehat{AFC} = 180°$
  $mes\ \widehat{AFC} = 180° - \left(mes\ \widehat{FAC} + mes\ \widehat{FCA}\right) = 180° - (60° + 60°)$
  $mes\ \widehat{AFC} = 180° - 120° = 60°$
  $\boldsymbol{mes\ \widehat{AFC} = 60°}$

- (FI) médiatrice du triangle FBC isocèle en F est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BFC}$ donc
  $mes\ \widehat{CFI} = mes\ \widehat{IFB} = 60°$
  $\boldsymbol{mes\ \widehat{CFI} = 60°}$

Propriété du MENA-FP

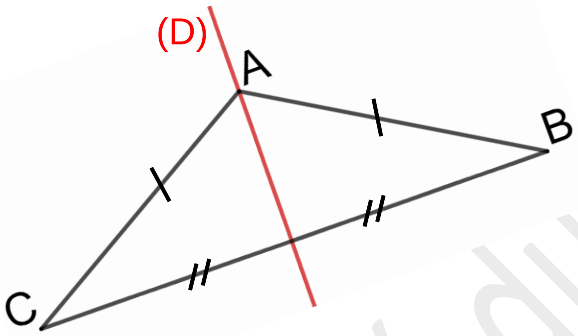
- $mes\ \widehat{FCA}\ = mes\ \widehat{FAC}\ = mes\ \widehat{AFC}\ = 60°$ donc AFC est un triangle équilatéral.
  La droite (EF) médiane du triangle AFC est la bissectrice de l'angle $\widehat{AFC}$
  donc $mes\ \widehat{AFE}\ = mes\ \widehat{CFE}\ = mes\ \widehat{AFC}$: 2= 60° :2 = 30°
  $\boldsymbol{mes\ \widehat{AFE}}$ **=30°** et $\boldsymbol{mes\ \widehat{CFE}}$ **=30°**

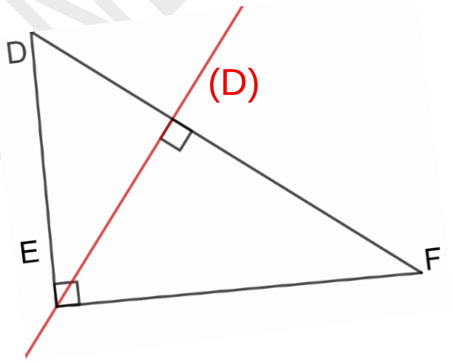
- (EF) médiane du triangle AFC équilatéral, est la médiatrice de [AC] et coupe [AC] en E. (EF) ⊥ (AE) donc $\boldsymbol{mes\widehat{AEF}\ = 90°}$ et $\boldsymbol{mes\widehat{CEF}\ = 90°}$

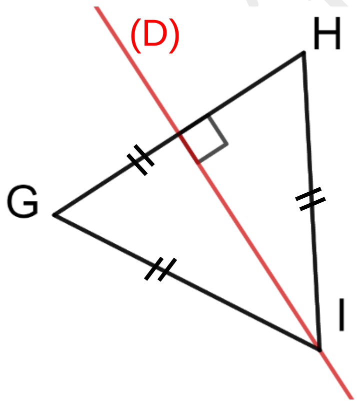
D. EXERCICES

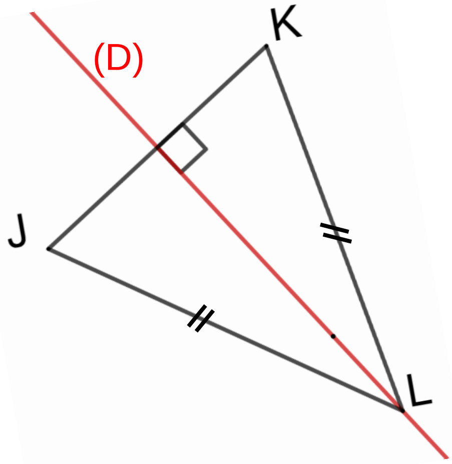
Exercice 1

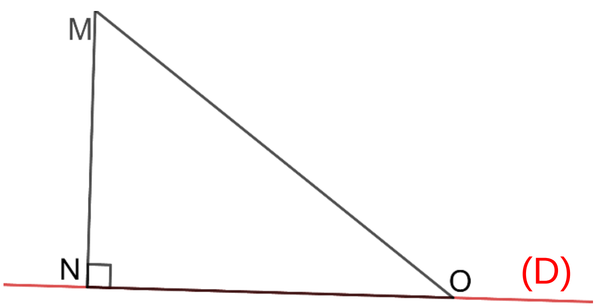
Observe les figures codées ci-dessous et dis ce que représente la droite (D) pour chaque triangle (donne tous les noms possibles)

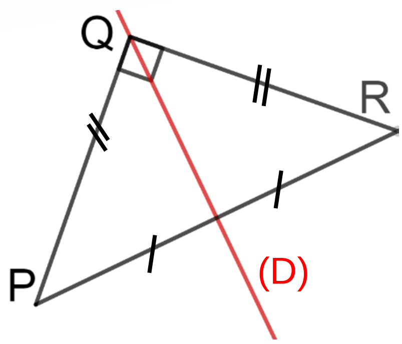












<u>Corrigé de l'exercice 1 :</u>

- **<u>Dans le triangle ABC isocèle en A :</u>**

La droite (D) est :

- L'axe de symétrie
- La hauteur issue du sommet A.
- La médiane issue du sommet A.
- La bissectrice de l'angle $\hat{A}$.
- La médiatrice de la base [BC].

- **<u>Dans le triangle EDF rectangle en E :</u>**

La droite (D) est la hauteur issue du sommet E.

- **<u>Dans le triangle équilatéral GIH :</u>**

La droite (D) est :

- Un axe de symétrie
- La hauteur issue du sommet I.
- La médiane issue du sommet I.
- La bissectrice de l'angle $\hat{I}$.
- La médiatrice de la base [GH].

- **<u>Dans le triangle JLK isocèle en L :</u>**

La droite (D) est :

- L'axe de symétrie.
- La hauteur issue du sommet L.
- La médiane issue du sommet L.
- La bissectrice de l'angle principal $\hat{L}$.
- La médiatrice de la base [JK].

- **<u>Dans le triangle MNO rectangle en O :</u>**

La droite (D) est la hauteur issue du sommet O.

- **<u>Dans le triangle PQR rectangle-isocèle en Q :</u>**

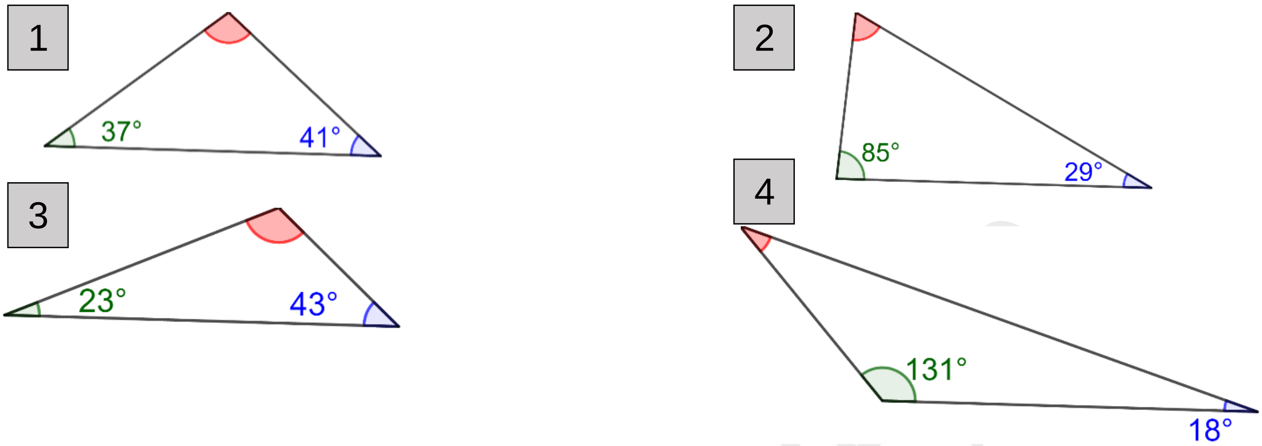
La droite (D) est :

- L'axe de symétrie
- La hauteur issue du sommet Q.
- La médiane issue du sommet Q.
- La bissectrice de l'angle $\hat{Q}$.
- La médiatrice de la base [PR].

Propriété du MENETFP

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, calcule la mesure de l'angle marqué en rouge.

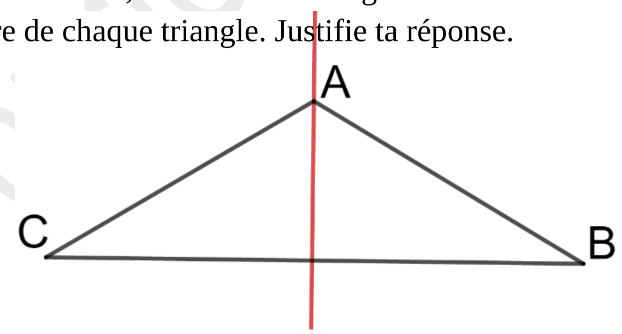


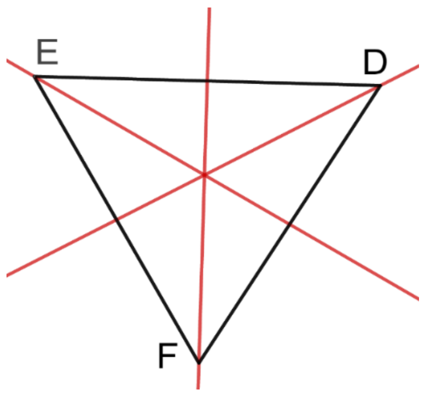
Corrigé de l'exercice 2 :
Mesure de l'angle marqué en rouge :
Cas 1 : 180-(37+41) =180-78=102°
Cas 2 : 180-(85+29) =180-114=66°
Cas 3 : 180-(23+43) =180-66=114°
Cas 4 : 180-(131+18) =180-149=31°

1. Exercices de renforcement

Exercice 3

Sur les figures ci-dessous, les droites en rouges sont des axes de symétrie.
Indique la nature de chaque triangle. Justifie ta réponse.





Corrigé de l'exercice 3 :

- Le triangle ABC est un triangle isocèle car il a un axe de symétrie.
- Le triangle EDF est un triangle équilatéral car il a trois axes de symétrie.

2. Exercice d'approfondissement

Exercice 4

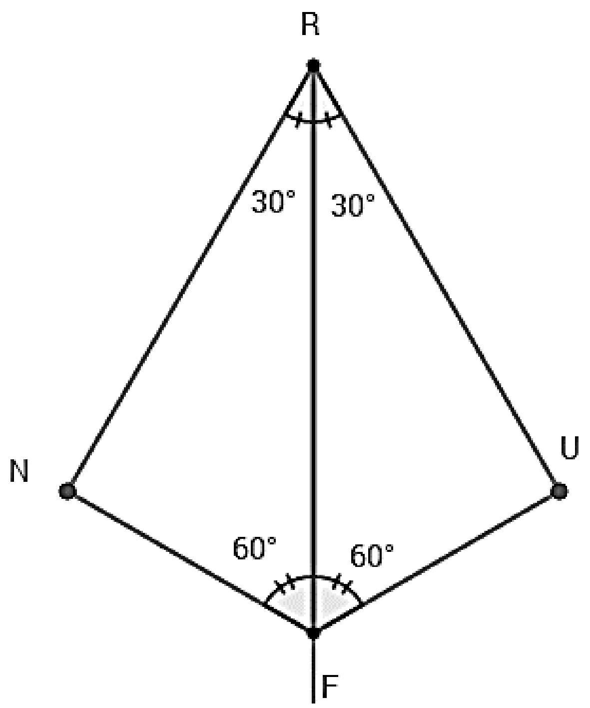
On donne quatre points R, U, F et N tels que :

- mes $\widehat{FRU} = 30°$
- mes $\widehat{RFU} = 60°$
- La droite (RF) est la bissectrice de l'angle $\widehat{NRU}$ et de l'angle $\widehat{NFU}$.

1) Fais une figure.
2) Justifie que les triangles RUF et RNF sont rectangles.

Corrigé de l'exercice 4

1-



2- a. Justifie que les triangles RUF

Les angles $\widehat{RFU}$ et $\widehat{FRU}$ sont complémentaires car mes $\widehat{RFU}$ + mes $\widehat{FRU}$ =60° + 30°= 90°.

Les angles $\widehat{RFU}$ et $\widehat{FRU}$ sont deux angles complémentaires du triangle RUF donc RUF est un triangle rectangle U

b. Justifie que les triangles RNF

- La droite (RF) est la bissectrice de l'angle $\widehat{NRU}$ donc mes $\widehat{FRU}$ = mes $\widehat{NRF}$ = 30°
- La droite (RF) est la bissectrice de l'angle $\widehat{NFU}$ donc mes $\widehat{RFU}$ = mes $\widehat{RFN}$ = 60°

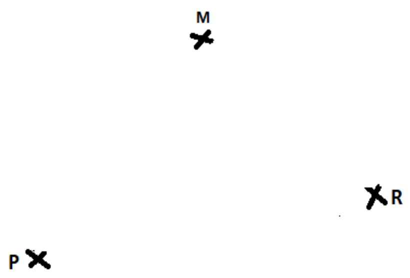
$\widehat{NRF}$ et $\widehat{RFN}$ sont deux angles complémentaires du triangle RNF donc RNF est un triangle rectangle en N

3. Situation d'évaluation

Un trésor a été caché au pied d'un baobab dans le village de Langossou dans la sous préfecture de Kokumbo. Pour réhabiliter l'hôpital d'un village, le chef veut retrouver ce trésor.

Hélas, le baobab a disparu depuis longtemps. Le chef du village se souvient seulement que ce baobab était situé à égale distance de la marre, du puits et du rocher.

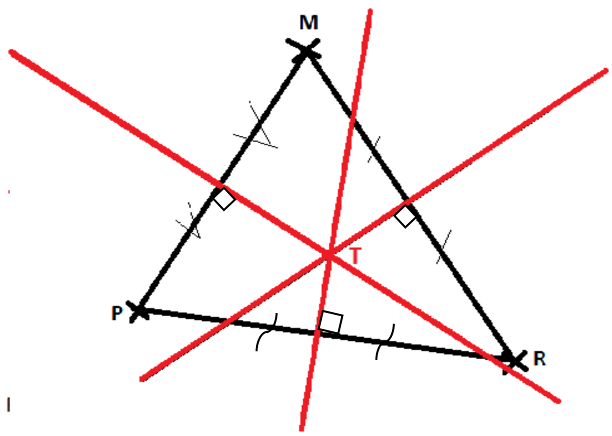
La marre étant représentée par le point M ; le puits par le point P et le rocher par le point R ; un élève de $5^{ème}$, natif dudit village décide d'aider le chef à retrouver le trésor.



1. Nomme les droites particulières à construire pour aider le chef à retrouver ce trésor.
2. Construis ces droites particulières dans le triangle PRM.
3. Trouve l'emplacement T du trésor.

Corrigé de la situation d'évaluation.

1. Les droites particulières à construire sont les médiatrices.
2. Voir figure
3. Le point T l'emplacement du trésor est le point de concours des trois médiatrices du triangle PRM. (Voir figure)



E. DOCUMENTS

https://www.pass-education.fr/triangles-geometrie-mathematiques-5eme/